

**Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați**  
**16 februarie 2013**

**Clasa a XII-a**

**Problema 1.**

a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = (a \cdot x + 1) \cdot e^{b \cdot x + 2} \text{ să fie o primitivă a funcției } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{2 \cdot x + 2} \cdot (4 \cdot x + 4).$$

b) Să se calculeze  $\int \sqrt{4 - x^2} dx, x \in [-2; 2]$ .

**Romeo Zamfir, profesor, Galați**

**Problema 2.** Se notează  $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  și pentru orice  $t \in \mathbb{R}$  se consideră  $f_t: E \rightarrow E$ ,

$$f_t(x, y) = \left( x + t \cdot y + \frac{t^2}{2}, y + t \right), \text{ pentru orice } (x, y) \in E. \text{ Considerând mulțimea}$$

$G = \{f_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ , să se demonstreze că :

a)  $G$  are o structură de grup comutativ în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

b)  $G$  este izomorf cu grupul  $(\mathbb{R}, +)$ .

**Romeo Zamfir, profesor, Galați**

**Problema 3.** Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabilă, cu derivata continuă pe  $\mathbb{R}$  care satisface proprietatea  $f'(x) - f(x) = x^2 + x + 1, (\forall) x \in \mathbb{R}$ .

a). Să se determine funcția  $f$  pentru  $f(0) = 0$ .

b). Să se demonstreze că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^x} = 4$ .

**Ioan Toderiță, profesor, Galați**

**Problema 4.** Fie  $p$  un număr prim de forma  $4 \cdot k + 3, k \in \mathbb{N}$ .

a). Să se arate că ecuația  $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$  nu are soluții în  $\mathbb{Z}_p$ .

b). Să se arate că dacă  $x^2 + y^2 = \hat{0}, x, y \in \mathbb{Z}_p$ , atunci  $x = \hat{0}$  și  $y = \hat{0}$ .

c). Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  ecuația  $x^2 + y^2 = 12005$ .

**Vasile Popa, profesor, Galați**

**Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați**

**16 februarie 2013**

**Clasa a XII-a**

**Barem de evaluare**

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
	a) Trebuie să avem că $F'(x) = f(x)$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$	1p
	Prin calcul, deducem că $F'(x) = (a \cdot b \cdot x + a + b) \cdot e^{b \cdot x + 2}$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ .	1p
	<p>Din relațiile <math>F'(0) = f(0) \Leftrightarrow (a+b) \cdot e^2 = 4 \cdot e^2 \Leftrightarrow a+b = 4</math> și</p> <p><math>F'(-1) = f(-1) \Leftrightarrow (-a \cdot b + a + b) \cdot e^{-b+2} = 0 \Leftrightarrow -a \cdot b + a + b = 0</math>, obținem</p> <p>sistemul <math>\begin{cases} a+b=4 \\ a \cdot b = a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a \cdot b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}</math>.</p> <p>Observăm că pentru <math>a = b = 2</math> obținem că <math>F(x) = (2 \cdot x + 1) \cdot e^{2 \cdot x + 2}</math>, pentru orice <math>x \in \mathbb{R}</math>, funcție care verifică relația <math>F'(x) = f(x)</math>, pentru orice <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>Răspuns: <math>a = b = 2</math>.</p>	2p

	<p><b>b)</b> Mai întâi calculăm <math>I = \int \sqrt{4-x^2} dx</math>, pentru <math>x \in (-2;2)</math>.</p> <p>Avem că</p> $I = \int \sqrt{4-x^2} dx = \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx =$ $4 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} dx =$ $= 4 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \int x \cdot (\sqrt{4-x^2})' dx = 4 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + x \cdot \sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx = 4 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + x \cdot \sqrt{4-x^2} - I$ <p>. Deci, <math>I = \int \sqrt{4-x^2} dx = 2 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{4-x^2} + c</math>, unde <math>c \in \mathbb{R}</math> și <math>x \in (-2;2)</math>.</p>	<b>2p</b>
	<p>Funcția <math>f : [-2;2] \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>f(x) = \sqrt{4-x^2}</math> este continuă, deci admite primitive. Notăm cu <math>F : [-2;2] \rightarrow \mathbb{R}</math> o primitivă a lui <math>f</math>. Mai sus am determinat primitivele funcției <math>f</math> pe intervalul <math>(-2;2)</math> și am obținut că</p> $F(x) = 2 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{4-x^2} + c$ , pentru orice $x \in (-2;2)$ , unde $c \in \mathbb{R}$ . Deoarece $F$ este derivabilă pe $[-2;2]$ , rezultă că $F$ este continuă pe $[-2;2]$ . <p>Obținem că <math>F(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x &lt; 2}} F(x) = \pi + c</math> și <math>F(-2) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x &gt; -2}} F(x) = -\pi + c</math>. Prin urmare, primitivele funcției <math>f</math> sunt de forma <math>F : [-2;2] \rightarrow \mathbb{R}</math> și</p> $F(x) = 2 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{4-x^2} + c$ , pentru orice $x \in [-2;2]$ .	<b>1p</b>

<p>2.</p>	<p>Fie <math>p, q \in \mathbb{R}</math> și funcțiile</p> $f_p, f_q : E \rightarrow E, f_p(x, y) = \left( x + p \cdot y + \frac{p^2}{2}, y + p \right), f_q(x, y) = \left( x + q \cdot y + \frac{q^2}{2}, y + q \right).$ <p>Avem că</p> $f_p \circ f_q : E \rightarrow E, (f_p \circ f_q)(x, y) = f_p(f_q(x, y)) = f_p \left( x + q \cdot y + \frac{q^2}{2}, y + q \right) =$ $= \left( x + q \cdot y + \frac{q^2}{2} + p \cdot (y + q) + \frac{p^2}{2}, y + q + p \right) = \left( x + (p + q) \cdot y + \frac{(p + q)^2}{2}, y + p + q \right),$ <p>pentru orice <math>(x, y) \in E</math>. Prin urmare, <math>f_p \circ f_q = f_{p+q}</math>, pentru orice <math>p, q \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>a) Ultima relație arată că operația de compunere a funcțiilor este bine definită pe <math>G</math>. Având în vedere că operația de compunere a funcțiilor este asociativă pe mulțimea <math>F = \{f \mid f : E \rightarrow E\}</math> și <math>G \subset F</math>, rezultă că operația de compunere indusă pe <math>G</math> este asociativă. Mai departe, folosind <math>f_p \circ f_q = f_{p+q}</math>, pentru orice <math>p, q \in \mathbb{R}</math>, se deduce ușor că operația de compunere indusă pe <math>G</math> este comutativă, admite element neutru <math>e = f_0 \in G</math>, orice element <math>f_p \in G</math> este simetrizabil (inversabil) și simetricul lui <math>f_p</math> este <math>f_{-p} \in G</math>.</p>	<p>2p</p> <p>2p</p>
	<p>b) Funcția <math>h : G \rightarrow \mathbb{R}, h(f_t) = t</math> este bijectivă (se demonstrează ușor) și <math>h(f_p \circ f_q) = h(f_{p+q}) = p + q = h(f_p) + h(f_q)</math>, pentru orice <math>p, q \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>Prin urmare, <math>G</math> este izomorf cu grupul <math>(\mathbb{R}, +)</math>, ceea ce trebuia demonstrat.</p>	<p>3p</p>

3.	<p>Înmulțim egalitatea cu <math>e^{-x}</math> și se obține:</p> $(e^{-x} \cdot f(x))' = e^{-x} \cdot (x^2 + x + 1).$ $\int (e^{-x} \cdot f(x))' dx = \int e^{-x} \cdot (x^2 + x + 1) dx \Leftrightarrow$ $e^{-x} \cdot f(x) = -e^{-x} \cdot (x^2 + x + 1) - e^{-x} \cdot (2 \cdot x + 1) - e^{-x} \cdot 2 + C.$ $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1 - 1 - 2 + C = 0 \Rightarrow C = 4.$ $f(x) = 4 \cdot e^x - (x^2 + 3 \cdot x + 4), f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$	1p 1p 1p 1p
	<p>b).</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^x - (x^2 + 3 \cdot x + 4)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^x - (2 \cdot x + 3)}{e^x}$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^x - 2}{e^x} = 4.$	3p
4	<p>a). Aplicăm Mica teoremă a lui Fermat: dacă <math>(x, p) = 1, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow p / x^{p-1} - 1 \Rightarrow p / x^{4k+2} - 1</math>.</p> <p>Presupunem că există <math>x \in \mathbb{Z}_p</math> astfel încât</p> $x^2 + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow x^2 = -\hat{1} \Rightarrow x^{2(2k+1)} = (-\hat{1})^{2k+1} \Rightarrow \hat{1} = -\hat{1} (fals).$	2p
	<p>b). Presupunem că <math>(\exists) x, y \in \mathbb{Z}_p^*</math> astfel încât <math>x^2 + y^2 = \hat{0} \Leftrightarrow (xy^{-1})^2 + \hat{1} = \hat{0} (fals)</math>. În concluzie singura soluție este <math>x = y = \hat{0}</math>.</p>	2p
	<p>c). Ecuația se mai scrie <math>x^2 + y^2 = 2401 \cdot 5. \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 7^4 \cdot 5</math>. Reducând ecuația în <math>\mathbb{Z}_7 \Rightarrow x^2 + y^2 = \hat{0}, x, y \in \mathbb{Z}_7 \Rightarrow x = y = \hat{0}</math>.</p> <p>Deci <math>x = 7 \cdot a, y = 7 \cdot b, a, b \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p>Ecuația devine <math>a^2 + b^2 = 49 \cdot 5</math>;</p> <p>La fel <math>a = 7m, b = 7n \Rightarrow m^2 + n^2 = 5 \Leftrightarrow</math></p> $(m, n) \in \{(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, 2), (1, -2), (-1, -2)\} \Rightarrow$ $(x, y) \in \{(98, 49), (08, -49), (-98, 49), (-98, -49)\} \cup$ $\{(49, 98), (-49, 98), (49, -98), (-49, -98)\}.$	3p