# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 5. 03. 2016

## Clasa a VIII – a

**PROBLEMA 1.** Să se arate că, dacă inversul sumei a trei numere reale nenule, este egal cu suma inverselor lor, atunci cel puţin două dintre numere au acelaşi modul (se presupune că suma celor trei numere este nenulă).

**PROBLEMA 2.** Dacă $x, y > 0$ sunt două numere reale care verifică relaţia

$$2\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(x+1)(y+4)},$$

calculaţi media geometrică a numerelor $x$ şi $y$.

**PROBLEMA 3.** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $AB = 12$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $M$ mijlocul segmentului $[BC]$ şi $P$ mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă cosinusul unghiului diedru format de planele $(VBC)$ şi $(ABC)$ este egal cu $\frac{3}{4}$, să se determine:

*a*) distanţa de la punctul $P$ la planul $(VBC)$;

*b*) distanţa de la punctul $O$ la planul $(VPM)$;

*c*) tangenta unghiului format de planele $(VAC)$ şi $(VBC)$.

**PROBLEMA 4.** Pe semidreptele $(OA$, $(OB$ şi $(OC$, perpendiculare două câte două, se consideră punctele $A'$, $B'$ şi $C'$, astfel încât $A' \in (OA)$, $B' \in (OB)$ şi $C' \in (OC)$. Ştiind că patrulaterele $A'B'BA$ şi $B'C'CB$ sunt inscriptibile, să se arate că:

*a*) $A'C'CA$ este patrulater inscriptibil;

*b*) Dacă $OH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$, atunci $H$ este ortocentrul triunghiului $ABC$;

*c*) Dacă $G$ este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$, atunci $OG \perp (ABC)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
## Etapa locală - 5. 03. 2016
## BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

**PROBLEMA 1.** Să se arate că, dacă inversul sumei a trei numere reale nenule, este egal cu suma inverselor lor, atunci cel puţin două dintre numere au acelaşi modul (se presupune că suma celor trei numere este nenulă).

**Barem de corectare.**

(1$p$) Din $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, obţinem succesiv:

(1$p$) $\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

(1$p$) $\frac{-(b+c)}{a(a+b+c)}=\frac{b+c}{b\cdot c}$

(1$p$) $(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=0$

(2$p$) $(b+c)(a+b)(a+c)=0$

(1$p$) de unde, $|a|=|b|$ sau $|b|=|c|$ sau $|a|=|c|$.

**PROBLEMA 2.** Dacă $x,y>0$ sunt două numere reale care verifică relaţia

$$2\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(x+1)(y+4)},$$

calculaţi media geometrică a numerelor $x$ şi $y$.

**Barem de corectare.** Avem:

(2$p$) $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(x+1)(y+4)} \Leftrightarrow 4x+y+4\sqrt{xy}=(x+1)(y+4)$

(2$p$) $\Leftrightarrow xy+4-4\sqrt{xy}=0$

(2$p$) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy}-2\right)^2=0$

(1$p$) $\Leftrightarrow \sqrt{xy}=2.$

**PROBLEMA 3.** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $AB = 12$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $M$ mijlocul segmentului $[BC]$ şi $P$ mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă cosinusul unghiului diedru format de planele $(VBC)$ şi $(ABC)$ este egal cu $\frac{3}{4}$, să se determine:

*a*) distanţa de la punctul $P$ la planul $(VBC)$;

*b*) distanţa de la punctul $O$ la planul $(VPM)$;

*c*) tangenta unghiului format de planele $(VAC)$ şi $(VBC)$.

**Barem de corectare.** Notăm cu $\alpha$, măsura unghiului diedru format de planele $(VBC)$ şi $(ABC)$.

(1*p*) *a*) Deoarece $\alpha = m(\widehat{VMO})$, şi $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, se obţine $VM = 8$ şi $VO = 2\sqrt{7}$.

(2*p*) Cum $PO \parallel BC$ rezultă că $PO \parallel (VBC)$, de unde $d(P;(VBC)) = d(O;(VBC)) = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.

(1*p*) *b*) Dacă $OB \cap PM = \{E\}$, atunci $OE = 3\sqrt{2}$, $VE = \sqrt{46}$

(1*p*) şi $d(O;(VPM)) = d(O;VE) = \frac{6\sqrt{161}}{23}$.

(1*p*) *c*) Dacă $S \in (VC)$, astfel încât $OS \perp VC$, atunci măsura unghiului diedru format de planele $(VAC)$ şi $(VBC)$ este $\beta = m(\widehat{BSO})$.

(1*p*) Din $OB = 6\sqrt{2}$ şi $OS = \frac{6\sqrt{14}}{5}$ se obţine $\operatorname{tg}\beta = \frac{OB}{OS} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$.

**PROBLEMA 4.** Pe semidreptele $(OA$, $(OB$ şi $(OC$, perpendiculare două câte două, se consideră punctele $A'$, $B'$ şi $C'$, astfel încât $A' \in (OA)$, $B' \in (OB)$ şi $C' \in (OC)$. Ştiind că patrulaterele $A'B'BA$ şi $B'C'CB$ sunt inscriptibile, să se arate că:

*a*) $A'C'CA$ este patrulater inscriptibil;

*b*) Dacă $OH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$, atunci $H$ este ortocentrul triunghiului $ABC$;

*c*) Dacă $G$ este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$, atunci $OG \perp (ABC)$.

**Barem de corectare.**

(2*p*) *a*) Deoarece patrulaterul $A'B'BA$ este inscriptibil, rezultă că $m\left(\widehat{OA'B'}\right) = m\left(\widehat{OBA}\right)$, de unde obţinem că $\Delta OA'B' \sim \Delta OBA$. Deci $OA' \cdot OA = OB' \cdot OB$.

Analog, se obţine $OB' \cdot OB = OC' \cdot OC$.

(1*p*) Aşadar, $OA' \cdot OA = OC' \cdot OC \Rightarrow \Delta OA'C' \sim \Delta OCA \Rightarrow m\left(\widehat{OA'C'}\right) = m\left(\widehat{OCA}\right)$, adică patrulaterul $A'C'CA$ este inscriptibil.

(2*p*) *b*) Deoarece $BC \perp OH$ şi $BC \perp OA$ rezultă că $BC \perp (AOH)$, adică $BC \perp AH$. Analog, se obţine $AB \perp CH$, adică $H$ este ortocentrul triunghiului $ABC$.

(1*p*) *c*) Fie $H$ ca la punctul *b*), $AH \cap BC = \{D\}$ şi $OD \cap B'C' = \{D'\}$. În triunghiul dreptunghic $OBC$, $m\left(\widehat{BOD}\right) = m\left(\widehat{OCB}\right)$. Cum $BCC'B'$ este inscriptibil, $m\left(\widehat{BCO}\right) = m\left(\widehat{OB'D'}\right)$. Deci $B'D' = OD'$. Analog se obţine $OD' = D'C'$, de unde $B'D' = D'C$, adică $A'D'$ este mediană în $\Delta A'B'C'$.

(1*p*) $OH$ intersectează mediana $A'D'$ a triunghiului $A'B'C'$. Analog se arată că $OH$ mai intersectează şi o altă mediană a triunghiului $A'B'C'$, de unde rezultă că $G \in (OH)$.

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.