OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016
CLASA a 9-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1. Rezolvaţi ecuaţia $3[x]=[x^2]+2$.

***

Detalii rezolvare	Barem asociat
Avem $3[x]\geq 2$, deci $[x]\geq 1$.	2p
Dacă $[x]=a\geq 3$, atunci $[x^2]-3[x]\geq a^2-3a=a(a-3)\geq 0$, deci ecuaţia nu are soluţii în acest caz	2p
Dacă $[x]=1$ obţinem $[x^2]=1$ şi avem mulţimea de soluţii $[1,\sqrt{2})$.	1p
Dacă $[x]=2$ obţinem $[x^2]=4$ şi avem mulţimea de soluţii $[2,\sqrt{5})$.	1p
Mulţimea soluţiilor este $[1,\sqrt{2})\cup[2,\sqrt{5})$	1p

Subiect 2. Determinaţi numerele întregi a,b,c pentru care $\{x\in\mathbb{R} \mid ax^2+bx+c=0\}=\{a,b\}$. (În notaţia $\{x,y\}$ se înţelege că elementele x şi y sunt distincte).

Prof.Dan Negulescu, Supliment GM 10/2015

Detalii rezolvare	Barem asociat
Cerinţa este echivalentă cu $a^3+ab+c=0$ şi $ab^2+b^2+c=0$, cu $a\neq b$	2p
Prin scădere rezultă $(a-b)(a^2+ab+b)=0$	2p
$b=-\dfrac{a^2}{a+1}=1-a-\dfrac{1}{a+1}$, cu $a\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	1p
Obţinem $a=-2$, $b=4$, $c=16$ sau $a=0$, care nu convine	2p

Subiect 3. a) Se consideră punctele arbitrare A,B,C,D,E. Verificaţi dacă există puncte P pentru care $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}$. În caz afirmativ, precizaţi-le poziţia.
b) Demonstraţi că dacă laturile triunghiului ABC sunt paralele cu medianele triunghiului MNP, atunci laturile triunghiului MNP sunt paralele cu medianele triunghiului ABC.

***

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului (eventual degenerat) ABC	1p
$\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{PM}$, unde M este mijlocul segmentului DE	1p
Egalitatea se obţine dacă şi numai dacă $\overrightarrow{PM}=3\overrightarrow{GM}$	1p

Dacă AB este paralelă cu mediana din P, atunci $\overrightarrow{AB} = x(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN})$; analog $\overrightarrow{BC} = y(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NM})$, $\overrightarrow{CA} = z(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})$, cu $x, y, z \in \mathbb{R}^*$	**2p**
Din $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$ şi $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$ rezultă $x\overrightarrow{PM} + x\overrightarrow{PN} = (2y - z)\overrightarrow{PM} + (2z - x)\overrightarrow{PN}$, deci $x = y = z$	**1p**
În acest caz, mediana din A are direcţia $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2x\overrightarrow{PM} + x(\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM}) = 3x\overrightarrow{PM}$ deci este paralelă cu PM; analog pentru celelalte mediane	**1p**

Subiect 4. Demonstraţi că dacă n este un număr natural nenul, atunci produsul

$$(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(3n)$$

este divizibil cu 3^n, dar nu este divizibil cu 3^{n+1}.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Procedăm prin inducţie. Pentru $n = 1$ concluzia se verifică	**2p**
Dacă notăm cu P_n produsul dat, atunci $P_{n+1} = 3(3n+1)(3n+2)P_n$	**2p**
Dacă este P_n divizibil cu 3^n, dar nu este divizibil cu 3^{n+1}, atunci P_{n+1} este divizibil cu 3^{n+1}, dar nu este divizibil cu 3^{n+2}, deoarece $3n+1$ şi $3n+2$ nu sunt divizibile cu 3	**3p**