INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA JUDEŢEANĂ
## 9 martie 2013

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Profil real, specializarea ştiinţele naturii**

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA A IX-A

**1.** Pe latura [BC] a triunghiului ABC considerăm punctele D, E, F, în această ordine, astfel încât $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FE}$. Dacă $M \in AB$ şi $N \in AC$ sunt astfel încât $AE \cap MD \cap NF = \{O\}$, arătaţi că dreptele MN şi BC sunt paralele.

*Sergiu Prisacariu*

**Soluţie.**

Aplicând teorema lui Menelaus în $\Delta ABE$ cu punctele coliniare O, D şi M,

obţinem că $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DE} \cdot \frac{OE}{OA} = 1$ ……………………………………………………………………..….2p

Aplicând teorema lui Menelaus în $\Delta ACE$ cu punctele coliniare O, F şi N,

rezultă că $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{OE}{OA} = 1$ …………….…………………………………………………..…..2p

Folosind ipotezele $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FE}$, deducem că $\frac{BD}{DE} = \frac{CF}{FE}$ ………………....……….…..1p

Din cele trei egalităţi obţinem $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ………………………………………………………….1p

Aplicând reciproca teoremei lui Thales, urmează că $MN \parallel BC$……………………………………..1p

**2.** Fie punctele coliniare A, B, C, D astfel încât AB = BC = CD. Un mobil parcurge distanţele AB, BC, CD cu vitezele constante $v_1, v_2$, respectiv $v_3$, diferite între ele. Un al doilea mobil parcurge distanţa AD cu viteza constantă $v$, care este media aritmetică a vitezelor $v_1, v_2$ şi $v_3$. Arătaţi că timpul necesar parcurgerii segmentului AD este mai mare pentru primul mobil decât pentru cel de-al doilea.

*Sergiu Prisacariu*

**Soluţie.**

Notând AB = BC = CD = a, se obţine $t_1 = \frac{a}{v_1}$, $t_2 = \frac{a}{v_2}$, $t_3 = \frac{a}{v_3}$, deci timpul în care primul mobil

parcurge AD este $T_1 = t_1 + t_2 + t_3 = a\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)$……………………………......……………2p

Timpul necesar celui de-al doilea mobil este $T_2 = \frac{9a}{v_1 + v_2 + v_3}$ …………………...……………..2p

Avem de arătat că: $a\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) > \frac{9a}{v_1 + v_2 + v_3}$,……………….…...…………………………1p adică $\frac{v_1+v_2+v_3}{3} > \frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}$, ceea ce rezultă din faptul că media aritmetică este mai mare decât media armonică, inegalitatea fiind strictă întrucât numerele $v_1, v_2$ şi $v_3$ sunt distincte……....2p

**3.** Determinaţi funcţia $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care $f(2)=3$ şi care verifică relaţia:
$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+...+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}=\frac{n}{f(n+1)}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

*Gazeta Matematică (Supliment)*

**<u>Soluţie.</u>**

Pentru n = 1 se obţine că $f(1)=1$ ........................................................................................... 1p

Dând în continuare valori lui n, intuim că $f(n)=2n-1$ ................................................................ 2p

Presupunerea precedentă se demonstrează prin inducţie……........……………………..…..……….4p

**4.** Triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O, are ortocentrul H şi centrul de greutate G. Fie A′, B′, C′ punctele diametral opuse punctelor A, B, C în cercul circumscris triunghiului. Dacă ΔA′B′C′ are ortocentrul H′ şi centrul de greutate G′, arătaţi că punctul O este mijloc şi pentru segmentul [HH′] şi pentru segmentul [GG′].

**<u>Soluţie.</u>**

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC'}=\vec{0}$ …………………………………..…………....…2p

Avem că $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OH'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$ ………..............................................2p

Adunând relaţiile, obţinem $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OH'}=\vec{0}$, adică O este mijlocul segmentului [HH′]………..…..1p

Dar $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ şi $\overrightarrow{OH'}=3\overrightarrow{OG'}$,………………....……………………..…………………..….1p

de unde $\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG'}=\vec{0}$, adică O este mijlocul segmentului GG′………...............................……..1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA JUDEŢEANĂ
## 9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Profil real, specializarea ştiinţele naturii**

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA A X-A

**1.** Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(x))=2f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Aflaţi punctele de pe graficul funcţiei care au abscisa egală cu ordonata.

b) Determinaţi funcţiile bijective cu proprietatea dată.

*Iulia Cecon*

**Soluţie.**

a) Fie $A(a, a)\in G_f$ ; atunci $f(a) = a$ .......... 2p

$f(f(a)) = f(a) = a$ .......... 1p

Înlocuind în relaţia din enunţ, obţinem $a = 2a + 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow A(-1, -1)$ este singurul punct care are coordonatele egale şi este situat pe graficul funcţiei f .......... 1p

b) Trecem $x \mapsto f^{-1}(x)$ ($f^{-1}$ există, funcţia f fiind bijectivă) .......... 1p

$f(x) = 2x + 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ .......... 2p

**2.** Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi numerele reale $a, b, x_1, x_2, ..., x_n$ din intervalul $(0, 1)$, astfel încât: $b^n \le x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n$. Demonstraţi că $(\log_a b)^n \ge \log_a x_1\cdot \log_a x_2\cdot ...\cdot \log_a x_n$.

*Cristian Moanţă, Gazeta Matematică*

**Soluţie.**

Inegalitatea de demonstrat revine la $\sqrt[n]{\log_a x_1\cdot\log_a x_2\cdot...\cdot\log_a x_n}\le\log_a b$ .......... 1p

Din inegalitatea mediilor, $\sqrt[n]{\log_a x_1\cdot\log_a x_2\cdot...\cdot\log_a x_n}\le\frac{1}{n}\left(\log_a x_1+\log_a x_2+...+\log_a x_n\right) =$

$= \frac{1}{n}\log_a x_1x_2...x_n$ .......... 4p

Cum funcţia $x\mapsto \log_a x$ este strict descrescătoare, $\log_a x_1x_2 ... x_n \le n\log_a b$ şi, de aici, cerinţa problemei .......... 2p

**3.** a) Dacă $z\in\mathbb{C}$, demonstraţi că $z^2+\bar{z}^2\le 2|z|^2$.

b) Fie a, b, c, d patru numere complexe astfel încât:

$$a^2+\bar{b}^2=2|c|^2,\ b^2+\bar{c}^2=2|d|^2,\ c^2+\bar{d}^2=2|a|^2 \text{ şi } d^2+\bar{a}^2=2|b|^2.$$

Demonstraţi că există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_4\in\{-1, 1\}$ pentru care $\varepsilon_1\cdot a+\varepsilon_2\cdot b+\varepsilon_3\cdot c+\varepsilon_1\cdot d = 0$.

*Florin Stănescu*

**Soluție.**

a) Dacă $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $z^2 + \bar{z}^2 = 2x^2 - 2y^2 \le 2(x^2 + y^2) = 2|z|^2$ .................................. 2p

Egalitatea se atinge pentru $y = 0$, deci când $z \in \mathbb{R}$ .................................................................. 1p

b) Adunând membru cu membru cele patru relații şi ținând seama de punctul a), obținem că a, b, c, d $\in \mathbb{R}$. Astfel, relațiile din enunț devin $a^2 + b^2 = 2c^2$, $b^2 + c^2 = 2d^2$, $c^2 + d^2 = 2a^2$, $d^2 + a^2 = 2b^2$ ...... 2p

Înlocuind succesiv, obținem că $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$, deci $|a| = |b| = |c| = |d|$ şi, de aici, urmează concluzia .................................................................................................................... 2p

**4.** Pe tastatura unui telefon celular, cifrele 1, 2, ..., 9 sunt aranjate în cele nouă căsuțe ale unui pătrat 3×3. Plecând de la o cifră oarecare de pe tastatură, Lucian-Georges formează numere de cinci cifre nenule, astfel încât căsuța fiecărei cifre a numărului (începând cu cea de-a doua) să aibă un singur vârf în comun cu căsuța cifrei precedente a numărului; el poate reveni de mai multe ori la aceeaşi cifră.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

a) Câte numere care să conțină atât cifre pare, cât şi cifre impare, se pot forma?
b) Câte numere care conțin numai cifre pare se pot forma?
c) Câte numere care conțin numai cifre impare se pot forma?

*Gabriel Popa*

**Soluție.**

a) Căsuțele care conțin cifre pare şi cele care conțin cifre impare au laturi întregi comune, deci nu se pot forma astfel de numere ........................................................................................ 2p
b) $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ de numere ........................................................................................ 2p
c) Avem $1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 16$ numere care încep cu 5 şi $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 = 64$ numere care încep cu 1, 3, 7 sau 9, în total 80 de numere ........................................................................................ 3p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

## ETAPA JUDEȚEANĂ
## 9 martie 2013

**Profil real, specializarea ştiințele naturii**

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA A XI-A

**1.** Dacă $n \in \mathbb{N}$, calculați $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+...+n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

*Gazeta Matematică (Supliment)*

**<u>Soluție.</u>**

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+...+n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{1^x+2^x+...+n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{1^x+2^x+...+n^x-n}}\right]^{\frac{1^x+2^x+...+n^x-n}{nx}} =$ .......................... 3p

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}+...+\frac{n^x-1}{x}\right)\cdot\frac{1}{n}} =$ ........................................................................................................ 2p

$= e^{(\ln 2+\ln 3+...+\ln n)\frac{1}{n}} =$ ........................................................................................................ 1p

$= e^{\frac{1}{n}\ln n!} = e^{\ln\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{n!}$ ........................................................................................................ 1p

**2.** Cătalin, membru în Armata Ultra, doreşte să ofere fiecărui suporter al echipei Steaua prezent la un meci desfăşurat pe Arena Națională (care are 60000 locuri şi este, desigur, plină) câte un banner matriceal având forma din figura 1. Cătalin intenționează să coloreze fiecare dintre cele 16 pătrățele din matrice fie cu roşu, fie cu albastru.

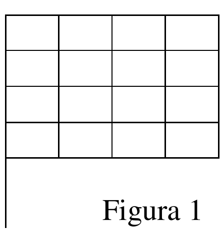

Figura 1

a) Poate să ofere Cătalin fiecărui suporter din stadion câte un banner colorat în mod diferit?

b) Care este numărul maxim de bannere distincte care pot fi colorate simetric în raport cu diagonala principală? (un exemplu de banner simetric în raport cu diagonala principală este prezentat în figura nr. 2).

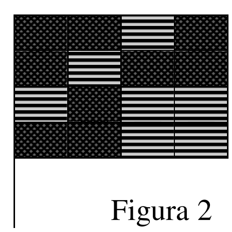

Figura 2

**<u>Soluție.</u>**

a) Numărul total de bannere distincte este $\underbrace{2\times 2\times ...\times 2}_{16\,\text{de}\,2} = 2^{16} = 65536 > 60000$.

Cătălin poate oferi fiecărui suporter câte un banner distinct ......................................................... 4p

b) Pot fi colorate $2^{10} = 1024$ bannere distincte, simetric față de diagonala principală ..................... 3p

**3.** a) Găsiți o matrice $A \in M(\mathbb{Z})$ astfel încât, dacă împărțim numărul $\det A$ la 4, obținem restul 1.

b) Indicați o matrice $B \in M_3(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că $\det B$ se divide cu 4.

c) Fie $T = \begin{pmatrix} 2011 & 2013 & 2015 \\ 2013 & 2009 & 2013 \\ 2017 & 2013 & 2019 \end{pmatrix}$. Aflați restul împărțirii prin 4 a numărului detT.

**<u>Soluție.</u>**

a) Alegem, de exemplu, $A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi detA = 1 = 4 · 0 + 1 ........................................... 2p

b) Putem considera $B = O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi detB = 0 = 4 · 0 + 0 .................................................. 2p

c) $\det T = \begin{vmatrix} 2011 & 2013 & 2015 \\ 2013 & 2009 & 2013 \\ 2017 & 2013 & 2019 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_4 - 1 & M_4 + 1 & M_4 - 1 \\ M_4 + 1 & M_4 + 1 & M_4 + 1 \\ M_4 + 1 & M_4 + 1 & M_4 - 1 \end{vmatrix} = M_4$, deci restul împărțirii la 4 a lui detT este egal cu 0 ........................................................................................................................ 3p

**4.** Fie f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că f(x + y) = f(x) + f(y), ∀x, y ∈ $\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția f este strict crescătoare dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ .

*Arpad Benyi, Revista de Matematică din Timişoara*

**<u>Soluție.</u>**

O funcție aditivă are proprietatea că f(0) = 0, iar f(nx) = nf(x), ∀n∈$\mathbb{N}$, ∀x∈$\mathbb{R}$ ............................. 2p

Dacă f este strict crescătoare, atunci f(1) > f(0) = 0, iar $f(x) \geq f([x]) = [x] \cdot f(1)$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \geq$ $\geq \lim\limits_{x\to\infty} [x] \cdot f(1) = +\infty$ ........................................................................................................... 3p

Reciproc, fie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ şi x < y. Atunci $f(n(y-x)) = f(ny - nx) = nf(y) - nf(x) =$ $= n(f(y) - f(x))$. Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(y) - f(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n(y-x)) = +\infty$, prin urmare f(y) − f(x) > 0, adică f(x) < f(y) ........................................................................................................................ 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA JUDEŢEANĂ
## 9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Profil real, specializarea ştiinţele naturii**

**BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE**
**CLASA A XII-A**

**1.** Pe mulţimea M = {Poli Iaşi, Steaua, Oţelul, Rapid, UTA} definim legea de compoziţie * astfel:

| * | Poli Iaşi | Steaua | Oţelul | Rapid | UTA |
|---|---|---|---|---|---|
| Poli Iaşi | Poli Iaşi | Steaua | Steaua | Steaua | Poli Iaşi |
| Steaua | Steaua | Steaua | Steaua | Steaua | Steaua |
| Oţelul | Poli Iaşi | Steaua | Poli Iaşi | Poli Iaşi | Oţelul |
| Rapid | Oţelul | Steaua | Oţelul | Poli Iaşi | Rapid |
| UTA | Poli Iaşi | Steaua | Oţelul | Rapid | UTA |

a) Precizaţi dacă legea * admite element neutru şi în caz că există, identificaţi-l .
b) Spunem că elementul $d \in M$ este *element destroyer* dacă $d*x = x*d = d$, $\forall x\in M$.
Admite legea de compoziţie descrisă mai sus element destroyer?
c) Pe mulţimea M dată mai sus, câte legi de compoziţie se pot defini (numărând-o şi pe cea deja definită)? Câte dintre acestea sunt comutative ?

**<u>Soluţie.</u>**
a) Se observă că UTA * x = x * UTA = x, $\forall x\in M$, deci UTA este elementul neutru ...................... 2p
b) Steaua * x = x * Steaua = Steaua, $\forall x\in M$, aşadar Steaua este elementul destroyer .................... 2p
c) Există $5^{25}$ legi de compoziţie posibile pe M .................................................................................. 2p
Dintre acestea, $5^{15}$ sunt comutative ......................................................................................... 1p

**2.** Pe mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$, considerăm legea de compoziţie * definită prin:

$$x * y = 5xy + 5x + 5y + 4,\ \forall x, y\in \mathbb{Z}.$$

a) Justificaţi asociativitatea legii *.
b) Cercetaţi existenţa elementului neutru.
c) Calculaţi ultimele 2000 cifre ale numărului 1*2*3*4* ... * 2012*2013.

**<u>Soluţie.</u>**
a) Justificarea corectă a asociativităţii
(de exemplu $(x*y)*z = x*(y*z) = 5^2(x+1)(y+1)(z+1) - 1;\ \forall x, y, z\in \mathbb{Z}$) ......................................... 3p
b) Nu există element neutru pentru legea * pe $\mathbb{Z}$ ............................................................................. 2p
c) Inductiv, $x_1 * x_2 * \dots * x_n = 5^{n-1}(x_1+1)(x_2+1) \dots (x_n+1) - 1,\ \forall x_1, x_2, \dots, x_n\in \mathbb{Z}$ ............................ 1p

1*2*3*4* ... * 2012*2013 = $5^{2012}\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot$ ... $2013\cdot 2014 - 1$ şi se observă că numărul 1*2*3* ... *2013 are pe ultimele 2000 poziții cifrele $\underbrace{999...9}_{2000\,de\,9}$ ........................................................................................ 1p

**3.** Determinați primitivele funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^{2013}+x^{1006}}{\left(x^{1007}+2\right)^{2013}}$.

*Cătălin Cristea, Recreații Matematice 1/2013*

**<u>Soluție.</u>**

$$f(x)=\frac{x^{1006}\left(x^{1007}+2\right)-x^{1006}}{\left(x^{1007}+2\right)^{2013}}=\frac{x^{1006}}{\left(x^{1007}+2\right)^{2012}}-\frac{x^{1006}}{\left(x^{1007}+2\right)^{2013}}$$ ........................................................ 2p

$$\int\frac{x^{1006}}{\left(x^{1007}+2\right)^{n}}dx=\frac{1}{1007}\int\frac{\left(x^{1007}+2\right)'}{\left(x^{1007}+2\right)^{n}}dx=-\frac{1}{1007\cdot(n-1)}\cdot\frac{1}{\left(x^{1007}+2\right)^{n-1}}+\mathcal{C}$$ ................................ 3p

$$\int f(x)dx=-\frac{1}{1007\cdot 2011}\cdot\frac{1}{\left(x^{1007}+2\right)^{2011}}+\frac{1}{1007\cdot 2012}\cdot\frac{1}{\left(x^{1007}+2\right)^{2012}}+\mathcal{C}$$ ..................................... 2p

**4.** Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive şi F o primitivă a sa cu F(1) = 0. Arătați că există $c\in(0, 1)$ astfel încât $(c + 1)F(c) + cf(c) = 0$.

*Carmen Botea şi Viorel Botea, Gazeta Matematică (Supliment)*

**<u>Soluție.</u>**

Concluzia revine la faptul că există $c\in(0, 1)$ pentru care $\left.\left(xF(x)+\left[xF(x)\right]'\right)\right|_{x=c}=0$ ................... 2p

adică $\left.\left[xe^{x}F(x)\right]'\right|_{x=c}=0$ ........................................................................................................... 2p

Funcția $G(x) = x\cdot e^{x}\cdot F(x)$, $x\in[0, 1]$, verifică ipotezele teoremei lui Rolle, de unde cerința problemei .
.............................................................................................................................................. 3p