INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA **SSMR DÂMBOVIŢA**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 28.02.2015
CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Arătaţi că numărul:

n = $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 70\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{70}\right)$ este natural si se divide cu 71.

G.M 2014

SUBIECTUL 2

a)Arătaţi că numărul $\frac{3^{10}+7\cdot 3^{11}}{8\cdot 3^{10}+3^{11}}$ este numar natural.

b) Arătaţi că dacă a şi b sunt numere naturale şi 2a + 3b este divizibil cu 11 atunci fracţia

$\frac{a+7b}{8a+b}$ este reductibilă.

R.M.T

SUBIECTUL 3

În jurul punctului O se formează unghiurile AOB, BOC, COD, DOA. Se ştie că ∢AOB şi ∢BOC sunt complementare, iar ∢AOB şi ∢COD sunt suplementare. Dacă [OM este bisectoarea ∢BOC, [ON este bisectoarea ∢COD şi [OP este bisectoarea ∢AOD, aflaţi:

a) **m(∢NOP).**
b) **m(∢AOB), ştiind că m(∢POM)=132^0.**
c) **m(∢AOB), ştiind că m(∢COD) este de 4 ori mai mare decât m(∢BOC).**

S.G.M. 2014

SUBIECTUL 4

În acelaşi semiplan mărginit de o dreaptă d se construiesc triunghiurile isoscele congruente ABM şi CDN de baze [AB], respectiv [CD], unde A, B, C, D aparţin dreptei d în această ordine. Dacă AN ∩ MD = {E}, MB ∩ NC = {F}, AN ∩ MB = {P}, MD ∩ NC = {Q} demonstraţi că AP = DQ şi EF ⊥ d. (Se poate utiliza teorema: Un triunghi este isoscel dacă şi numai dacă unghiurile de la bază sunt congruente).

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 2 ore.

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Arătaţi că numărul:

n = $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 70\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{70}\right)$ **este natural şi se divide cu 71.**

n = $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 70 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 70\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 70\cdot\frac{1}{3} + \ldots + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 70\cdot\frac{1}{70}$.	**1p**
n = $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 70 + 1\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 70 + 1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 70 + \ldots + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 69$.	**1p**
Ceea ce înseamnă că n este număr natural.	**1p**
n are 70 de termeni şi se grupează câte 2 termenii egal depărtaţi de capete.	**1p**
n = $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 70 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 69)+(1\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 70 + 1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 68\cdot 70)+\ldots+(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 34\cdot 36\cdot\ldots\cdot 70 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 35\cdot 37\cdot\ldots\cdot 70)$.	**1p**
n = $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 69\,(70 + 1) + 1\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 68\cdot 70\,(69 + 2) +\ldots+(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 34\cdot 37\cdot\ldots\cdot 70\,(36 + 35)$.	**1p**
Cum suma din fiecare paranteză este 71, rezultă că n se divide cu 71.	**1p**

SUBIECTUL 2

a) Arătaţi că $\frac{3^{10}+7\cdot 3^{11}}{8\cdot 3^{10}+3^{11}}$ **este număr natural.**

b) Arătaţi că dacă a şi b sunt numere naturale şi 2a + 3b este divizibil cu 11, atunci fracţia $\frac{a+7b}{8a+b}$ **este reductibilă.**

a)

$\frac{3^{10}+7\cdot 3^{11}}{8\cdot 3^{10}+3^{11}} = \frac{3^{10}(1+7\cdot 3)}{3^{10}(8+3)} =$	**1p**
$= \frac{3^{10}\cdot 22}{3^{10}\cdot 11} = 2 \in \mathbb{N}$.	**1p**

b)

$2a + 3b = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 6(2a + 3b) = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 12a + 18b = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow a + 7b = \mathcal{M}_{11}$ (1).	**2p**
Apoi $2a + 3b = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 4(2a + 3b) = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 8a + 12b = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 8a + b = \mathcal{M}_{11}$ (2).	**2p**
Din (1) şi (2), rezultă că fracţia $\frac{a+7b}{8a+b}$ este reductibilă.	**1p**

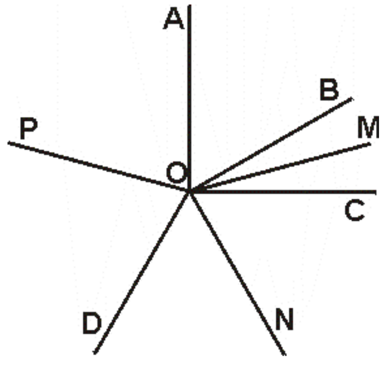
SUBIECTUL 3

În jurul punctului O se formează unghiurile AOB, BOC, COD, DOA. Se ştie că ∢AOB şi ∢BOC sunt complementare, iar ∢AOB şi ∢COD sunt suplementare. Dacă [OM este bisectoarea ∢BOC, [ON este bisectoarea ∢COD şi [OP este bisectoarea ∢AOD, aflaţi:

a) m(∢NOP).

b) m(∢AOB), ştiind că m(∢POM)=132^0.

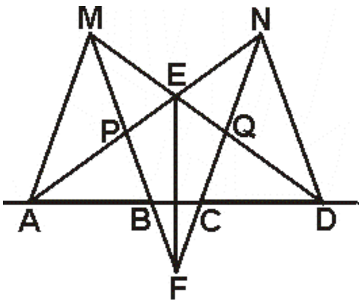
c) m(∢AOB), ştiind că m(∢COD) este de 4 ori mai mare decât m(∢BOC).

	a) m(∢NOP) = (360^0 − 90^0):2 = 135^0.	**3p**
	b) Dacă m(∢AOB) = x, m(∢BOC) = y, m(∢COD) =z, m(∢DOA) =t, avem $x + \frac{y}{2} + \frac{t}{2} = 132^0$, rezultă $2x + y + t = 264^0$, dar $y + t = 180^0$, de unde $2x=84^0$ şi $x = 42^0$.	**2p**
	c) $z = 4y$ şi $x + z = 180^0$, rezultă $x + 4y = 180^0$, dar $x + y = 90^0$, de unde $3y=90^0$; $y = 30^0$ şi atunci $x = 60^0$.	**2p**

SUBIECTUL 4

În acelaşi semiplan mărginit de o dreaptă d se construiesc triunghiurile isoscele congruente ABM şi CDN de baze [AB], respectiv [CD], unde A, B, C, D aparţin dreptei d în această ordine. Dacă $AN \cap MD = \{E\}$, $MB \cap NC = \{F\}$, $AN \cap MB = \{P\}$, $MD \cap NC = \{Q\}$ demonstraţi că AP = DQ şi $EF \perp d$.

(Se poate utiliza teorema: Un triunghi este isoscel dacă şi numai dacă unghiurile de la bază sunt congruente).

	$\Delta ADN \equiv \Delta DAM$(LUL) $\Rightarrow \sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle NAD$.	**1p**
	$\Delta PAB \equiv \Delta QDC$(ULU) $\Rightarrow$ AP = DQ.	**2p**
	$\sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle NAD$, rezultă AE=DE, dar AP = DQ se obţine PE=QE(1).	**1p**
	$\sphericalangle FBC \equiv \sphericalangle FCB$(fiind opuse la vârf cu unghiurile de la bazele triunghiurilor isoscele congruente) $\Rightarrow$ FB=FC, dar PB = QC din $\Delta PAB \equiv \Delta QDC$, se obţine PF=QF(2).	**1p**
	Din (1) şi (2), rezultă $\Delta EPF \equiv \Delta EQF$(LLL), de unde $\sphericalangle EFP \equiv \sphericalangle EFQ$ şi atunci [FE este bisectoarea unghiului BFC, dar ΔFBC este isoscel, rezultă $EF \perp d$. Obs. Se va urmări echivalenţa punctajului pentru fiecare cale de rezolvare.	**2p**