OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a VII-a
16.02.2013

Subiectul I.(20 puncte)

Demonstrați că $\{\sqrt{122}\}+\{\sqrt{123}\}+\ldots+\{\sqrt{132}\}<3$. (S-a notat cu $\{x\}$partea fracționară a numărului real x).

prof. Adrian Magdaş, Colegiul Național „Emil Racoviță" Cluj-Napoca

Subiectul II.(30 puncte)

a) Aflați cifra a pentru care numărul $n=\overline{\underbrace{\underbrace{20}\underbrace{13}\underbrace{20}\underbrace{13}\ldots\underbrace{a}}_{2013\ cifre}}$ este divizibil cu 137.

prof. Sorin Borodi, Liceul Teoretic "Alexandru Papiu Ilarian" Dej

b) Se consideră mulțimea $A=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{15},\frac{1}{35},\ldots,\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right\}$ cu $n\in N^*$. Demonstrați că oricare ar fi B o submulțime nevidă a mulțimii A, suma elementelor mulțimii B nu poate fi număr natural.

prof. Vasile Şerdean, Şcoala Gimnazială nr. 1 Gherla

Subiectul III.(20 puncte)

Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AB>AD$ şi $AD=15cm$. Bisectoarele unghiurilor $\langle ADC$ şi $\langle BCD$ se intersectează într-un punct $M\in(AB)$ şi $AC\cap BD=\{O\}$.

a) Calculați perimetrul paralelogramului $ABCD$;

b) Dacă $AC\cap DM=\{E\}$ determinați raportul $\frac{OE}{AC}$;

c) Fie P piciorul perpendicularei din punctul A pe dreapta DM şi Q piciorul perpendicularei din B pe dreapta CM, demonstrați că punctele P,O,Q sunt coliniare.

prof. Ioan Groza, Şcoala Gimnazială Avram Iancu Turda

Subiectul IV.(20 puncte)

Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $(AB)=(AC)$ şi punctele E,P cu $E\in(AB)$ şi $P\in(BC)$ astfel încât $AB=6\cdot AE$ şi $BP=\frac{5}{12}\cdot BC$. Să se arate că $EP\perp BC$.

prof. Vasile Şerdean, Şcoala Gimnazială nr. 1 Gherla

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

P-ța Ştefan cel Mare nr. 4, Cluj - Napoca
Tel: +40 (0) 264 590 778
Fax: +40 (0) 264 592 832
www.isjcj.ro ,cluj@isjcj.ro

Barem clasa a VII-a
(OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I.

$\left\{\sqrt{11^2+k}\right\}=\sqrt{11^2+k}-11=\dfrac{k}{\sqrt{11^2+k}+11}<\dfrac{k}{22}$, unde $k=\overline{1,11}$. Rezultă **(10 puncte)**

că $\left\{\sqrt{122}\right\}+\left\{\sqrt{123}\right\}+\ldots+\left\{\sqrt{132}\right\}<\dfrac{1+2+\ldots+11}{22}=\dfrac{66}{22}=3$. **(10 puncte)**

Subiectul II.

a) Deoarece 2013:4=503 rest 1, grupa de 4 cifre „2013” se repetă de 503 ori, deci $n=\overline{\underbrace{\underbrace{2013}\underbrace{2013}\ldots\underbrace{2013}a}_{2013\ cifre}}$ **(10 puncte)**

Numărul 20132013 este divizibil cu 137, deoarece $20132013=10001\cdot 2013$, iar $10001\,\vdots\,137$

Deoarece 2013:8=251 rest 5, înseamnă că este necesar ca numărul format din ultimele 5 cifre să se divide cu 137, deci să avem $\overline{2013a}\,\vdots\,137$, de unde se obține $a=9$. **(5 puncte)**

b) Suma elementelor mulțimii A este :

$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}<1$ **(10 puncte)**

O submulțime nevidă a lui A, diferită de A, are suma elementelor pozitivă şi mai mică decât $\dfrac{n}{2n+1}<1$, Deci nu poate fi număr natural. **(5 puncte)**

Subiectul III. Desen corect **(5 puncte)**

a) Se dem că triunghiurile ADM şi BCM sunt isoscele $\Rightarrow$ AM=MB $\Rightarrow$ AB=2AD=30 cm $\Rightarrow$ P=90 cm. **(5 puncte)**

b) E este centru de greutate în triunghiul ABD$\Rightarrow \dfrac{OE}{AO}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{OE}{AC}=\dfrac{1}{6}$ **(5 puncte)**

c) OP linie mijlocie în triunghiul BMD$\Rightarrow$ OP$\parallel$AB
OQlinie mijlocie în triunghiul AMC$\Rightarrow$OQ$\parallel$AB $\Rightarrow$P,O,Q sunt coliniare **(5 puncte)**

Subiectul IV. Desen corect **(5 puncte)**

Ducem înălțimea $AD\perp BC$,
AD mediană $\Rightarrow$BD=DC **(5 puncte)**

$BE=5\cdot AE\Rightarrow\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{5}{6}$ **(5 puncte)**

$BC=2\cdot BD\Rightarrow\dfrac{BP}{BD}=\dfrac{5}{6}$ $\Rightarrow$EP$\parallel$AD, dar $AD\perp BC\Rightarrow EP\perp BC$ **(5 puncte)**