Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice
Inspectoratul Şcolar Judeţean Vaslui

Olimpiada Naţională de Matematică - Clasa a XII-a

Etapa locală - Vaslui, 15 februarie 2015

1. Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi injectivă cu proprietatea că $f(1) = 1$. Demonstraţi că, dacă există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $f(x_0) \geq 2$, atunci $\int_0^1 arctg(f(x))dx > \frac{3}{4}$.

Gazeta Matematică, enunţ modificat

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi mulţimea $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx,\ (\forall)\ y \in G\}$. Dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, demonstraţi că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

Gazeta Matematică

3. Se consideră funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + \{x\}(1 - \{x\})$ şi $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, unde prin $\{x\}$ am notat partea fracţionară a numărului real x.

a) Demonstraţi că f admite primitive şi că orice primitivă a sa este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

b) Să se arate că există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = F(x) - ax$ să fie periodică, având o perioadă egală cu 1.

4. Fie $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ o funcţie pentru care mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix} | x \in \mathbf{R}^* \right\}$ este parte stabilă a mulţimii matricelor pătratice de ordin 2 în raport cu înmulţirea matricelor. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.

Notă: 1. Timp de lucru 3 ore.

2. Fiecare subiect se notează de la 0p la 7p. Punctaj maxim 28p.

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice
Inspectoratul Şcolar Judeţean Vaslui

Olimpiada Naţională de Matematică - Clasa a XII-a

Etapa locală - Vaslui, 15 februarie 2015

Soluţii şi bareme orientative

1. Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi injectivă cu proprietatea că $f(1) = 1$. Demonstraţi că, dacă există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $f(x_0) \geq 2$, atunci $\int_0^1 arctg(f(x))dx > \frac{3}{4}$.

Soluţie: Cum f este continuă şi injectivă rezultă că f este strict monotonă.

.... 2p

Cum $f(1) = 1$ şi $(\exists)$ $x_0 \in (0,1)$ cu $f(x_0) \geq 2$ rezultă că f este strict descrescătoare.

.... 2p

$\Rightarrow$ $f(x) \geq f(1) = 1$, $(\forall)$ $x \in [0,1]$. Cum funcţia $arctg$ este monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ $arctg(f(x)) \geq arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, $(\forall)$ $x \in [0,1]$.

.... 2p

Atunci, $\int_0^1 arctg(f(x))dx \geq \frac{\pi}{4}(1-0) > \frac{3}{4}$.

.... 1p

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi mulţimea $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \ (\forall)\ y \in G\}$. Dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, demonstraţi că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

Soluţie: Vom demonstra că $Z(G) = G$. Presupunem prin reducere la absurd că $(\exists)$ $x \in G \setminus Z(G)$. Atunci, există $y \in G$ cu proprietatea că $xy \neq yx$.

.... 1p

Rezultă că $y \in G \setminus Z(G)$, în caz contrar y comută cu x. Prin urmare $x^2 = e$ şi $y^2 = e$.

.... 1p

Să presupunem că $xy \in Z(G)$. Atunci, $(xy)y = y(xy) \Rightarrow x = yxy \Rightarrow xy = yx$, contradicţie.

.... 2p

Dacă $xy \in G \setminus Z(G)$ atunci $(xy)^2 = e \Rightarrow xyxy = e \Rightarrow yx = xy$, contradicţie.

.... 2p

Prin urmare, $Z(G) = G$, ceea ce arată că G este grup comutativ.

.... 1p

3. Se consideră funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + \{x\}(1 - \{x\})$ şi $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, unde prin $\{x\}$ am notat partea fracţionară a numărului real x.

a) Demonstraţi că f admite primitive şi că orice primitivă a sa este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

b) Să se arate că există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = F(x) - ax$ să fie periodică, având o perioadă egală cu 1.

Soluţie: a) Deoarece $f(x) = 1 + (x-k)(1+k-x),\ (\forall)\ x \in (k, k+1\ ),\ k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ f este continuă pe orice interval de forma $(k, k+1)$ ca fiind funcţie elementară.

.... 1p

Fie $n \in \mathbf{Z}$. Atunci, $\lim\limits_{x \nearrow n} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow n} [1 + (x - n + 1)(n - x)] = 1$ iar $\lim\limits_{x \searrow n} f(x \searrow) = \lim\limits_{x \searrow n} [1 + (x - n)(1 + n - x)] = 1$. Cum $f(n) = 1$, rezultă că f este continuă în orice punct $x_0 = n \in \mathbf{Z}$. Prin urmare, f este continuă pe $\mathbf{R} \Rightarrow f$ admite primitive.

.... 2p

Dacă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcţiei f atunci $F'(x) = f(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Cum $\{x\} \in [0, 1)$, rezultă că $f(x) \geq 1 > 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$, ceea ce arată că F este strict crescătoare.

.... 1p

b) $G(x + 1) = G(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \Rightarrow\Rightarrow F(x + 1) - a(x + 1) = F(x) - ax,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$ ceea ce conduce la $a = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$.

.... 1p

Cum f este periodică de perioadă 1, iar pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există $n \in \mathbf{Z}$ astfel ca $n \leq x < n + 1$ rezultă

$$\int_x^{x+1} f(t)dt = \int_x^{x+1} f(t - (n+1))dt = \int_{x-n-1}^{x-n} f(y)dy = \int_{x-n-1}^{0} f(y)dy + \int_0^{x-n} f(y)dy =$$
$$= \int_{x-n}^{1} f(t+1)dt + \int_0^{x-n} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 [1 + x(1-x)]dx =$$
$$= \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{6}.$$

.... 2p

4. Fie $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ o funcţie pentru care mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix} | x \in \mathbf{R}^* \right\}$ este parte stabilă a mulţimii matricelor pătratice de ordin 2 în raport cu înmulţirea matricelor. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.

Soluţie: Notă $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}^*$. Cum G este parte stabilă rezultă că $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}^*$, $A(x) \cdot A(y) \in G\ \Rightarrow \begin{pmatrix} xy & 0 \\ yf(x) + f(y) & 1 \end{pmatrix} \in G$ de unde $yf(x) + f(y) = f(xy),\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}^*$

.... 2p

Pentru $y = -1$ obţinem $-f(x) + f(-1) = f(-x) \Rightarrow f(x) + f(-x) = f(-1)$. Notând $f(-1) = 2a \in \mathbf{R}$ obţinem $f(x) + f(-x) = 2a$.

.... 1p

Pentru $x = -1$ obţinem $yf(-1) + f(y) = f(-y)\ \Rightarrow\ 2ay + f(y) = 2a - f(y) \Rightarrow$ $f(y) = a(1 - y)$. Prin urmare, $f(x) = a(1 - x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*,\ a \in \mathbf{R}$.

.... 2p

Se verifică imediat axiomele grupului.

.... 1p

Funcţia $\varphi : \mathbf{R}^* \to G$ definită prin $\varphi(x) = A(x)$ este izomorfismul căutat.

.... 1p