OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A VII-A

1. Rezolvați în numere întregi ecuația $\sqrt{x-5}=15-y^2$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

2. Fie *x*, *y*, *z* cifre nenule distincte.

a) Determinați valorile raționale ale numărului

$$a=\sqrt{\overline{0,x(y)}+\overline{0,y(z)}+\overline{0,z(x)}}.$$

b) Aflați valorile raționale ale numărului

$$a=\sqrt{\overline{0,00.....0x(y)}+\overline{0,00.....0y(z)}+\overline{0,00.....0z(x)}},$$

unde după virgulă în fiecare număr sunt *n* cifre de 0, $n\in\mathbb{N}$.

Octavia Popa, Brăila

3. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AD\neq CD$ și $AB=AD+DC$. Notăm cu M punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor A și D. Să se demonstreze că:

a) punctele A, M, C nu sunt coliniare;

b) $\text{aria}[ADCM]=\text{aria}[AMB]$.

Marius Damian, Brăila

4. Pe o tablă magnetică se află primele 16 numere naturale nedivizibile cu 4. Elena își propune să completeze un dreptunghi cu 3 linii și 5 coloane cu numere distincte de pe tablă astfel încât cele 3 sume de pe linii să fie egale și cele 5 sume de pe coloane să fie egale. Începe cu cel mai mare număr de pe tablă și reușește ce și-a propus.

a) Ce număr de pe tablă a rămas nefolosit?

b) Dați un exemplu de așezare a numerelor care să verifice ipotezele din enunț!

Gabriel Daniilescu, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015

CLASA A VII-A - Soluții

1. Rezolvați în numere întregi ecuația $\sqrt{x-5}=15-y^2$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

Soluție. $\sqrt{x-5}\geq 0$ si x-5 ≥ 0 => 15-$y^2 \geq 0$ => $y^2 \leq 15$ si y $\in$ Z=>$y^2 \in \{0,1,4,9\}$

- $y^2=0 \Rightarrow \sqrt{x-5}=15 \Rightarrow x-5=225 \Rightarrow x=230$
- $y^2=1; y=\pm 1 \Rightarrow \sqrt{x-5}=14 \Rightarrow x-5=196 \Rightarrow x=201$
- $y^2=4; y=\pm 2 \Rightarrow \sqrt{x-5}=11 \Rightarrow x-5=121 \Rightarrow x=126$
- $y^2=9; y=\pm 3 \Rightarrow \sqrt{x-5}=6 \Rightarrow x-5=36 \Rightarrow x=41$

2. Fie *x*, *y*, *z* cifre nenule distincte.

a) Determinați valorile raționale ale numărului $a=\sqrt{\overline{0,x(y)}+\overline{0,y(z)}+\overline{0,z(x)}}$

b) Aflați valorile raționale ale numărului $a=\sqrt{\overline{0,00.....0x(y)}+\overline{0,00.....0y(z)}+\overline{0,00.....0z(x)}}$, unde după virgulă în fiecare număr sunt *n* cifre de 0, $n\in\mathbb{N}$.

Octavia Popa, Brăila

Soluție. a) $a=\sqrt{\dfrac{10(x+y+z)}{90}}=\sqrt{\dfrac{x+y+z}{9}}=\dfrac{\sqrt{x+y+z}}{3}$

$a\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow x+y+z=k^2, k\in\mathbb{N}$

Deoarece $1\leq x<y<z\leq 8 \Rightarrow k^2\in\{9,16\}$. Deci $a\in\left\{1,\dfrac{4}{3}\right\}$.

b) Pentru $n=2k, k\geq 1, k\in\mathbb{N}$, avem $a=\sqrt{\dfrac{10(x+y+z)}{9\cdot 10^{n+1}}}=\dfrac{\sqrt{x+y+z}}{3\cdot 10^k}$ și $a\in\left\{\dfrac{1}{10^k},\dfrac{4}{3\cdot 10^k}\right\}$

Pentru $n = 2k+1, k \in \mathbb{N},$ avem $a = \dfrac{\sqrt{10(x+y+z)}}{3 \cdot 10^{k+1}}$ pentru $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y+z=10$ și

$a \in \left\{ \dfrac{1}{3 \cdot 10^k} \right\}.$

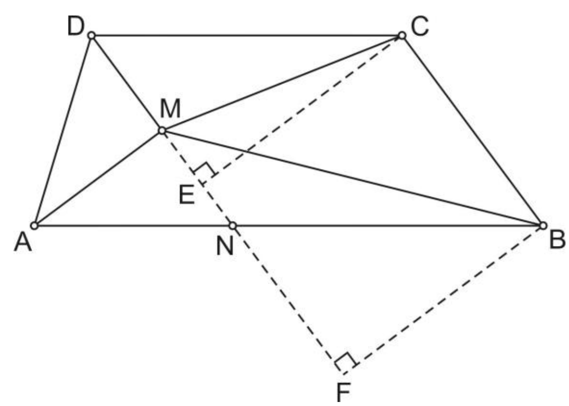
3. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD,$ $AD \neq CD$ și $AB = AD + DC.$ Notăm cu M punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor A și D. Să se demonstreze că:

a) punctele A, M, C nu sunt coliniare;

b) $\text{aria}[ADCM] = \text{aria}[AMB].$

Marius Damian, Brăila

Soluție. a) Presupunem, prin reducere la absurd, că punctele A, M, C sunt coliniare. Atunci $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle CAB$ (alterne interne). Dar din ipoteză avem că $[AM$ este bisectoarea unghiului $DAB,$ deci $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CAD.$ Deducem că $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle CAD,$ deci $\triangle DCA$ este isoscel cu $AD = CD,$ fals. Se contrazice faptul că din ipoteză avem $AD \neq CD.$ Presupunerea făcută este falsă, deci punctele A, M, C nu sunt coliniare.



b) Fie $\{N\} = DM \cap AB.$ Deoarece $[DN$ este bisectoarea unghiului ADC, avem $\sphericalangle ADN \equiv \sphericalangle CDN,$ iar din $DC \parallel AB$ rezultă $\sphericalangle CDN \equiv \sphericalangle AND$ (alterne interne). Prin urmare, $\sphericalangle ADN \equiv \sphericalangle AND,$ deci $\triangle ADN$ este isoscel cu $AD = AN$. Atunci bisectoarea AM este și mediană, deci $\text{aria}[AMD] = \text{aria}[AMN].$

Din ipoteză avem $AB = AD + DC.$ Obținem astfel că $NB = AB - AN = AB - AD = DC$ și cum $NB \| DC,$ rezultă că $NBCD$ este paralelogram. Construim $CE \perp DN$ și $BF \perp DN,$ $E, F \in DN$ și avem $CE = BF,$ deci $\text{aria}[CMD] = \dfrac{CE \cdot DM}{2} = \dfrac{BF \cdot MN}{2} = \text{aria}[BMN].$ În final,

$$\text{aria}[ADCM] = \text{aria}[ADM] + \text{aria}[CMD] = \text{aria}[AMN] + \text{aria}[BMN] = \text{aria}[AMB].$$

4. Pe o tablă magnetică se află primele 16 numere naturale nedivizibile cu 4. Elena își propune să completeze un dreptunghi cu 3 linii și 5 coloane cu numere distincte de pe tablă astfel încât cele 3 sume de pe linii să fie egale și cele 5 sume de pe coloane să fie egale. Începe cu cel mai mare număr de pe tablă și reușește ce și-a propus.

a) Ce număr de pe tablă a rămas nefolosit?

b) Dați un exemplu de așezare a numerelor care să verifice ipotezele din enunț!

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție. a) Mulțimea numerelor de pe tablă este

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21\}.$$

Suma lor este $S_{16} = 171.$ Notăm cu n numărul nefolosit și cu S_{15} suma numerelor așezate în cele 15 pătrățele ale dreptunghiului. Avem $S_{15} = 171 - n.$ Notăm cu S_c suma numerelor de pe o coloană și cu S_l suma numerelor de pe o linie $\Rightarrow S_{15} = 5S_c$ și $S_{15} = 3S_l \Rightarrow S_{15} \vdots 5$ și $S_{15} \vdots 3 \Rightarrow S_{15} \vdots 15 \Rightarrow 171 - n \vdots 15 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 165 + 6 - n \vdots 15 \Leftrightarrow 6 - n \vdots 15 \Leftrightarrow n - 6 \vdots 15 \Rightarrow n \in \{6, 21\}$. Dar 21 este cel mai mare număr de pe tablă $\Rightarrow n \neq 21 \Rightarrow n = 6.$

b) $S_{15} = 171 - 6 = 165 \Rightarrow S_c = 33$ și $S_l = 55.$ Un exemplu ar fi:

5	11	17	13	9
7	19	1	18	10
21	3	15	2	14