Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XII-a

I) Adott a következő halmaz: $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a\end{pmatrix} \| a,b\in Z\right\}$

a) Bizonyítsuk be, hogy $(M,\cdot)$ monoid.

b)Legyen $A\in M$ és $X\in M_2(Z)$. Ha $AX=XA$, akkor igazoljuk, hogy $X\in M$ vagy létezik $\alpha\in Z$ úgy, hogy $A=\alpha\cdot I_2$.

c) Igazoljuk, hogy M –nek végtelen sok invertálható eleme van.

G.M. 10/2012

II) Legyen $(G,\cdot)$ csoport, melynek semleges eleme e, és $x,y\in G$, úgy, hogy $x^2=y^2=(xy)^2$.

Igazoljuk, hogy: a) $y^4=e$

b) $x^{2013}+y^{2013}=x+y$.

c) $(xy)^{2012}=e$.

Prof. *Traian Tămîian*

III) a) Ellenőrizzük a következő azonosságot : $\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{/}=-\dfrac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}, \forall x\in(1,\infty)$.

b) Számítsuk ki: $\displaystyle\int \frac{x^2-x-\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}\cdot e^x dx,\qquad x\in(1,\infty)$.

Prof.*Adrian Bud*

IV) Legyen $a>0$ és az $f:[0,a]\to R$ a $[0,a]$-n kétszer deriválható függvény , melynek a másodrendű deriváltja folytonos a $[0,a]$ intervallumon, és $f(a)=f^{/}(a)=0$. Mutassuk ki, hogy bármely $k\in\{1, 2\}$ esetén fennállnak az alábbi összefüggések:

a) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\int_0^a x^k f^{(k)}(x)dx,$

b) $\displaystyle(\int_0^a f(x)dx)^2\le\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k!)^2}\cdot\int_0^a (f^{(k)}(x))^2dx$.

Prof. *Gigel Buth* és *Gelu Râmbu* matematikus

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XII-a

Barem de corectare

I.

a) Demonstreaza ca este monoid …………………….. 3 puncte

b) ………………………………………..3 puncte

c) Exemplu ……………………………..1 punct

II.

a) Din $x^2=(xy)^2 \Rightarrow xx=xyxy \Rightarrow x=yxy$ (1)

Din $y^2=(xy)^2 \Rightarrow yy=xyxy \Rightarrow y=xyx$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow xy=yxyxyx \Rightarrow xy=y(xy)^2x \Rightarrow xy=yy^2x \Rightarrow xy=y^3x$ şi folosind (1)

$\Rightarrow xy=y^3(yxy) \Rightarrow xy=y^4xy \Rightarrow x=y^4x \Rightarrow e=y^4$ (3) ....3 puncte

$\Rightarrow y^{2013}=(y^4)^{503}\cdot y=e\cdot y=y$ ....1 punct

Din (1) şi (2) $\Rightarrow yx=xyxyxy \Rightarrow yx=(xy)^2xy \Rightarrow yx=x^2xy \Rightarrow yx=x^3y$ şi folosind (1)

$\Rightarrow yx=x^3(xyx) \Rightarrow yx=x^4yx \Rightarrow y=x^4y \Rightarrow e=x^4$ ....1 punct

$\Rightarrow x^{2013}=(x^4)^{503}\cdot x=e\cdot x=x$ (4)

b) Din (3) şi (4) $\Rightarrow x^{2013}y^{2013}=xy.$ ....1 punct

c) Folosind ipoteza avem: $(xy)^{2012}=[(xy)^2]^{1006}=(x^2)^{1006}=(x^4)^{503}=e^{503}=e$ ....1 punct

III.

a) Verificare …………………….. 3 puncte

b) Descompune integrala in $I=\int \frac{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})^2}e^x dx-\int \frac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}e^x dx$ 1punct

Integreaza prin parti 1punct

Finalizare ....2 puncte

IV.

a) Calculeaza integrand prin parti pentru $k\in\{1,2\}$ .... 4 puncte

b) Aplica inegalitatea Cauchy-Schwarz, forma integrala .... 3 puncte

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro