Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VIII-a

1.a)Legyenek x, y valós számok úgy, hogy $9x^2+25y^2-6x\sqrt{3}-10y\sqrt{5}+8=0$.

Igazoljátok, hogy: $x^2-y^2=2x^2y^2$.

prof. Gheorghe Moldovan, Medieşu Aurit

b) Ha x,y,z, $t\in$R, mutassuk ki, hogy $xy(z^2-t^2)^2\geq(xz^2-yt^2)(yz^2-xt^2)$.

prof. Ovidiu Pop, C.N.”M.Eminescu”

2 .a) Igazoljuk, hogy $x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}\in N$

prof. Monica Amic, Acâş

b) i) Igazoljuk, hogy két, teljes négyzet után következő szám szorzata felírható két négyzet összegeként.

ii) Felhasználva esetleg az i) alpontot, mutassuk ki, hogy $(a^2+1)(b^2+1)\geq 2(ab-1)(a+b)$, bármilyen a és b nullától különböző természetes számok esetén.

prof. Bud Adrian, Negreşti-Oaş

3. Az AB = 6 cm oldalhosszúságú ABCD négyzet síkjára emeljük az MD és NC merőlegeseket, a sík ugyanazon oldalán, úgy, hogy MD = 6cm, NC = 9 cm, AC$\cap$ BD = $\{O\}$.

a) Mutasd ki, hogy A,B,N,M nem koplanaris pontok;

b) Határozzuk meg az M pont AC egyenestől mért távolságát;

c) Igazoljuk, hogy MN$\perp$MO és számítsuk ki az OMN háromszög területét.

prof. Adriana Boroş, Livada

4.Legyen SABCD szabályos négyoldalú gúla. AM merőleges az SD egyenesre, M$\in$SB, BN merőleges az SC egyenesre, N$\in$SC, CP merőleges az SD egyenesre, P$\in$SD, DQ merőleges az SA egyenesre, Q $\in$SA és R az N pont AC egyenes szerinti szimmetrikusa.

a) Igazoljuk, hogy B, R, Q, D koplanárisak.

b) Határozzuk meg MP és RQ egyenesek szögének mértékét.

Gazeta Matematică nr.11/2012

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VIII-a

Barem de corectare

1. a) $\left(3x-\sqrt{3}\right)^2+\left(5y-\sqrt{5}\right)^2=0$ ……………………………………………2p

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ si $y=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………..…………………………………………1p

Finalizare …..…………………………………………………………………..1p

b) Inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$xyz^4-2xyz^2t^2+xyt^4\geq xyz^4-x^2z^2t^2-y^2z^2t^2+xyt^4$ ……………………..……………………. 2p.

Echivalent cu $z^2t^2(x-y)^2\geq 0$ ……………………………………………………………………………1p

2. a) $x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$

- după raționalizarea numitorilor obținem

$\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+\dots+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{2024-2025}=$ ……………………………………. 1p

$=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\dots-\sqrt{2024}+\sqrt{2025}=$ ……………………………………………………………………1p

$=-1+45=44\in\mathbb{N}$ $(\sqrt{2025}=45)$……………………..………..1p

b) i) $(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1$ …………………………………1p

$=(ab-1)^2+(a+b)^2$ ……………………………………………………………..1p

ii) $(a^2+1)(b^2+1)=(ab-1)^2+(a+b)^2\geq 2\sqrt{(ab-1)^2(a+b)^2}$ ……………. 1p

$=2(ab-1)(a+b)$ …………………………………………………………………...1p

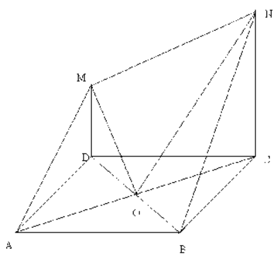
3. a) Presupunem prin absurd că A, M, N, B sunt coplanare. Obținem că MN || AB, contradicție...2p

b) Folosind teorema celor trei perpendiculare, se obține d (M, AC)= MO. 1p

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MDO obținem MO= $3\sqrt{6}$ cm............1p

c)Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic NCO obținem NO = $3\sqrt{11}$ cm..........1p

In trapezul dreptunghic MNCD se obține MN = $3\sqrt{5}$ cm..1p



Conform reciprocii teoremei lui Pitagora triunghiul MON este dreptunghic deci MN $\perp$ MO. Daca triunghiul MON este dreptunghic, atunci $A_{MON} = \dfrac{MN \cdot MO}{2} = \dfrac{9\sqrt{30}}{2} cm^2$ 1p

4. a)SABCD – piramidă patrulateră regulată $\Rightarrow$AQ≡ NC

Fie QE perpendicular pe AC, deci AE≡ CF, OE ≡ OF, EQ≡ NF , NF este perpendicular pe AC, QE|| NF,…………………..…………………………………………………………1p

Deci EQFR este paralelogram…………………………………………………………………………………1p

RQ∩ EF= {O}, QR∩ BD= {O} deci B,R,Q , D sunt coplanare………………………………………………1p

b)BM≡ DP, SBD triunghi isoscel, deci PM|| BD……………………………………………..…………1p

Unghiului dintre dreptele MP şi RQ este congruent cu unghiului dintre dreptele BD şi RQ……1p

BD este perpendicular pe planul (ASC) şi OQ inclusă în planul (ASC), deci BD este perpendicular

pe OQ………………………………………………………………………………………………………1p

Deci, măsura unghiului dintre dreptele MP şi RQ este 90°……………………………………………………..1p