Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

I) Adott a következő halmaz: $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Z \right\}$

a) Bizonyítsuk be, hogy $(M, \cdot)$ monoid.

b)Legyen $A \in M$ és $X \in M_2(Z)$. Ha $AX = XA$, akkor igazoljuk, hogy $X \in M$ vagy létezik $\alpha \in Z$ úgy, hogy $A = \alpha \cdot I_2$.

c) Igazoljuk, hogy M –nek végtelen sok invertálható eleme van.

G.M. 10/2012

II) Legyen $(G, \cdot)$ csoport, melynek semleges eleme e, és $x, y \in G$, úgy, hogy $x^2 = y^2 = (xy)^2$.

Igazoljuk, hogy: a) $y^4 = e$

b) $x^{2013} + y^{2013} = x + y$.

c) $(xy)^{2012} = e$.

Prof. *Traian Tămîian*

III) a) Ellenőrizzük a következő azonosságot : $\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right)' = -\frac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}, \forall x \in (1, \infty)$.

b) Számítsuk ki: $\int \frac{x^2 - x - \sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2} \cdot e^x dx, \quad x \in (1, \infty)$.

Prof.*Adrian Bud*

IV) Legyen $a > 0$ és az $f : [0, a] \to R$ a $[0, a]$-n kétszer deriválható függvény , melynek a másodrendű deriváltja folytonos a $[0, a]$ intervallumon, és $f(a) = f'(a) = 0$. Mutassuk ki, hogy bármely $k \in \{1, 2\}$ esetén fennállnak az alábbi összefüggések:

a) $\int_0^a f(x)dx = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \int_0^a x^k f^{(k)}(x)dx,$

b) $(\int_0^a f(x)dx)^2 \le \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k!)^2} \cdot \int_0^a (f^{(k)}(x))^2 dx$.

Prof. *Gigel Buth* és *Gelu Râmbu* matematikus

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

Barem de corectare

1.) a.) se arată prin calcul direct că: $\det(A-xI_2)=x^2-(\mathrm{Tr}A)x+\det A$…………………………3 puncte

b.) Din teorema Hamilton-Cayley rezultă $A^2-2A+3I_2=O_2$, de unde $A^2+3I_2=2A$ (1)....1 punct

se arată că $\det(A^2+3I_2)=\det(2A)=2^2\det A=12$ (2)...1 punct

din $A^2+I_2=2(A-I_2)$, se obține $\det(A^2+I_2)=2^2\det(A-I_2)=2^2\cdot 2=8$ (3).......................1 punct

Din (2) şi (3) obţinem: $2\cdot\det(A^2+I_2)-\det(A^2+3I_2)=2\cdot 8-12=4.$ ....1 punct

2.) a.) se folosesc relaţiile:

(1) $\det(X+Y)+\det(X-Y)=2\cdot(\det X+\det Y)$

(2) **det**$(X\cdot Y)=\det(Y\cdot X)=\det X\cdot\det Y$ pentru scrierea lor.... 2 puncte

punând în relatia (1) X=AB şi Y=BA şi folosind (2) se obtine

(3) $\det(AB+BA)+\det(AB-BA)=4\det A\cdot\det B$..1 punct

Din (3) si identitatea din enunt se obtine cerința punctului a)..............................1punct

b.) se foloseşte relaţia $X^2-(\mathrm{Tr}X)\cdot X+(\det X)\cdot I_2=O_2$, oricare ar fi $X,Y\in M_2$..... ....1 punct

în care se pune X=AB-BA si avem

$(AB-BA)^2-(\mathrm{Tr}(AB-BA))(AB-BA)+\det(AB-BA)I_2=O_2$ (3)

dar Tr(AB-BA)=0 si tinand seama rezultatul de la a), din (3) rezulta b). …..2 puncte

3.) $a_{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2k}+2$ ……………………………………………………..……..1 punct

$a_{2k+2}=a_{2k+1}+\frac{2}{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2k}+2+\frac{2}{2k+1}$ ....1 punct

$a_2=3$, $a_3=\frac{7}{2}$, $a_4=\frac{25}{6}$ ....1 punct

se arată prin inducție că $a_{2k}\in(0,5)$ ....2 puncte

cum $a_{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2k}+2$, rezultă că EMBED Equation.3 . ...1 punct

de unde

EMBED Equation.3 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ ………………………………………………………..……. 1 punct

4.) a.) se arată prin inducție că $a_n=\frac{n+1}{n!}$ ………………………………… …………... 2 puncte

demonstrarea că şirul este descrescător……………………………………..…….1 punct

$(a_n)_{n\geq 1}$ strict pozitiv, deci mărginit inferior,

Prin urmare şirul este convergent ……………………………………….……..1 punct b.) Înlocuim a_n cu $\frac{n+1}{n!}$. Limita devine:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left[(n-1)!\cdot a_n\right]=\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$$ .... 3 puncte