Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Varianta 1

Olimpiada de matematică – clasa a XI-a
etapa zonală – 15 februarie 2014

1. Se dau punctele $A(3,2)$ şi $B(2,4)$. Să se determine punctele M, de pe dreapta $x-y=3$ pentru care $A_{\Delta OAM}=A_{\Delta OBM}$

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a,b,c\in$ □. Să se calculeze A^n.

3. Fie $a_n=\ln\sqrt{\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ dacă $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

4. Se consideră şirul (a_n) definit prin $a_1=\dfrac{1}{3}$ şi $a_{n+1}=2a_n+(-1)^{n+1}$

Să se studieze convergenţa şirului cu termenul general $b_n=\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.

5. Fie $\Delta_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$, $a,b\in$ □, $a\neq b$ un determinant de ordinul n.

a) Să se stabilească o relaţie de recurenţă între $\Delta_n,\Delta_{n-1},\Delta_{n-2}, n\geq 3, n\in$ □

b) Să se determine Δ_n.

Popa Ionela, Popa Cristian, L.T. Salamon Ernő Gheorgheni

Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Varianta 2

Olimpiada de matematică – clasa a XI-a
etapa zonală – 15 februarie 2014

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că, dacă $X^n=A$, atunci $AX=XA$

b) Să se determine matricele $X\in M_2($□$)$ pentru care $AX=XA$

c) Să se rezolve pe $M_2($□$)$ ecuaţia $X^2=A$.

2. Matricea $A\in M_n($□$)$ satisface relaţia $A^3=A+I_n$. Să se arate că $\det(A)>0$.

3. Să se demonstreze că şirul cu termenul general $a_n=\log_n(n+1)$, $n\geq 2$, este monoton şi mărginit, apoi să se calculeze limita şirului cu termenul general $b_n=\left(\log_n(n+1)\right)^{n\ln n}$, $n\geq 2$!

4. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este definit prin $x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}+\sqrt{1-x_n}}$, $x_0\in(0,1)$.

a) Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$!

b) Să se scrie termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, în funcţie de x_0!

5. Se consideră matricea de ordinul n $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix}$.

Să se determine matricea inversă a lui A!

Dávid Géza