MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ 2022 CONSTANȚA - IAȘI - NEAMȚ

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Iași, 16 aprilie 2022

CLASA a VIII-a

Problema 1. a) Arătați că, dacă $a, b \in [1, \infty)$, atunci $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \geqslant \dfrac{2}{1+ab}$.

b) Fie $x, y, z \in [0, \infty)$, cu proprietatea că $2x + 2y + 2z + xy + yz + zx = 9$.
Arătați că:

$$\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{y^2+2y+2} + \frac{1}{z^2+2z+2} \geqslant \frac{3}{5}.$$

Problema 2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|ax + b| \leqslant 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.
a) Arătați că $|a^2 + ab + 2b| \leqslant 2$.
b) Aflați numerele a și b pentru care $|a^2 + ab + 2b| = 2$.

Problema 3. În interiorul cubului $ABCDA'B'C'D'$ se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ cu baza $ABCD$, astfel încât $\sphericalangle\big((SA'B'), (SC'D')\big) = 30°$. Fie punctul M pe latura $A'D'$ pentru care $\sphericalangle A'B'M = 30°$.
a) Aflați unghiul dintre apotema piramidei $SABCD$ și planul (ABC).
b) Determinați tangenta unghiului dintre planele $\big(MAB'\big)$ și (SAB).

Problema 4. Se consideră numărul natural n, cu $n \geqslant 2$. Spunem că numărul S este *special*, dacă pentru orice scriere a lui n sub forma $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, cu $k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$ și $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k$, există numerele $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ și $a_1n_1 + a_2n_2 + \ldots + a_kn_k = S$.
a) Arătați că numărul $n^2 - 2n$ **nu** este special.
b) Aflați toate numerele speciale.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Iași, 16 aprilie 2022

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 1.
a) Arătați că, dacă $a, b \in [1, \infty)$, atunci $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \geqslant \dfrac{2}{1+ab}$.

b) Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ cu proprietatea că $2x + 2y + 2z + xy + yz + zx = 9$. Arătați că:

$$\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{y^2+2y+2} + \frac{1}{z^2+2z+2} \geqslant \frac{3}{5}.$$

Soluție. a) Inegalitatea este echivalentă cu $(a-b)^2(ab-1) \geqslant 0$. Deoarece $ab \geqslant 1$, inegalitatea din enunț este adevărată. **2p**

b) Egalitatea $2x + 2y + 2z + xy + yz + zx = 9$ este echivalentă cu:
$(x+1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x+1) = 12$. **1p**

Fie $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$. Inegalitatea de demonstrat se rescrie

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geqslant \frac{3}{5}, \tag{1}$$

unde numerele reale $a, b, c \geqslant 1$ verifică relația $ab + bc + ca = 12$.

Folosind punctul a), obținem succesiv:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geqslant \frac{2}{1+ab}, \quad \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geqslant \frac{2}{1+bc} \quad \text{și} \quad \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} \geqslant \frac{2}{1+ca}.$$

Adunând membru cu membru inegalitățile precedente, deducem că:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geqslant \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \quad (2)$$ **2p**

Utilizând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică pentru numerele $1 + ab$, $1 + bc$ și $1 + ca$, deducem că:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{9}{(1+ab)+(1+bc)+(1+ca)} = \frac{3}{5},$$

de unde, ținând cont de (2), obținem inegalitatea (1), adică cerința problemei. **2p**

Problema 2. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|ax + b| \leqslant 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.*
a) Arătați că $\left|a^2 + ab + 2b\right| \leqslant 2$.
b) Aflați numerele a și b pentru care $\left|a^2 + ab + 2b\right| = 2$.

Soluție. a) Pentru $x = 0$ în inegalitatea din enunț, rezultă că $|b| \leqslant 1$. **1p**

Înlocuind $x = 1$ și apoi $x = -1$, din ipoteză obținem $|a + b| \leqslant 1$ și $|a - b| \leqslant 1$.
Așadar $|2a| = |(a + b) + (a - b)| \leqslant |a + b| + |a - b| \leqslant 2$, deci $|a| \leqslant 1$. **1p**

Rezultă că și $\dfrac{a+b}{2} \in [-1, 1]$. Obținem $\left|a \cdot \dfrac{a+b}{2} + b\right| \leqslant 1$, adică $\left|a^2 + ab + 2b\right| \leqslant 2$. ... **1p**

b) Pentru $a = 0$, din $\left|a^2 + ab + 2b\right| = 2$ obținem $b \in \{-1, 1\}$. Perechile $(a, b) = (0, 1)$ și $(a, b) = (0, -1)$ verifică proprietatea

$$(\mathcal{P}) : |ax + b| \leqslant 1, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1],$$

deci sunt soluții ale problemei. **1p**

Vom arăta că, pentru $a \neq 0$, nu se obțin alte soluții. Presupunem, prin absurd, că există o pereche (a, b) de numere reale, cu proprietatea $(\mathcal{P})$, astfel încât $a \neq 0$ și $\left|a^2 + ab + 2b\right| = 2$.

Considerăm funcția de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Egalitatea $\left|a^2 + ab + 2b\right| = 2$ este echivalentă cu $\left|f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right| = 1$. Proprietatea $(\mathcal{P})$ se rescrie:

$$|f(x)| \leqslant 1, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1]\,.$$

Singurele valori ale lui x pentru care este posibil ca $|f(x)| = 1$ sunt $x = 1$ și $x = -1$, deci este necesar fie ca $\dfrac{a+b}{2} = 1$, fie ca $\dfrac{a+b}{2} = -1$. **2p**

În prima situație, obținem $a = b = 1$, iar în cea de-a doua, deducem $a = b = -1$.

Cu aceste valori ale lui a și b, proprietatea din enunț devine

$$|x + 1| \leqslant 1, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1]\,,$$

ceea ce este absurd, deoarece afirmația precedentă este falsă (un contraexemplu este $x = 1$).

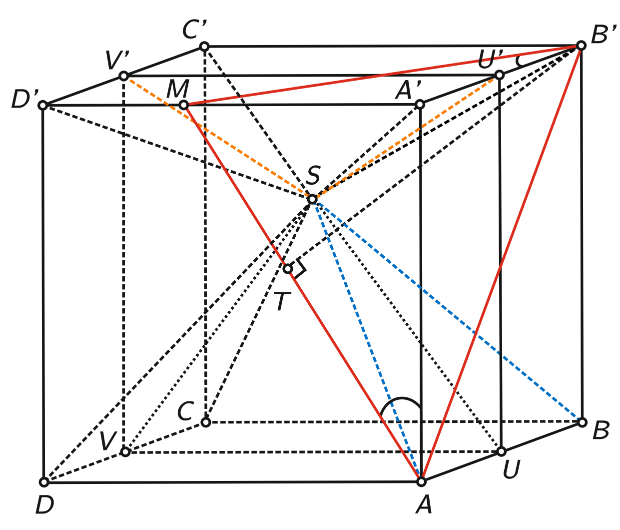
Ca urmare, presupunerea făcută este falsă, deci problema nu are soluții (a, b), cu $a \neq 0$. **1p**

Problema 3. *În interiorul cubului $ABCDA'B'C'D'$ se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ cu baza $ABCD$, astfel încât $\sphericalangle\big((SA'B'), (SC'D')\big) = 30°$. Fie punctul M pe latura $A'D'$ pentru care $\sphericalangle A'B'M = 30°$.*

a) *Aflați unghiul dintre apotema piramidei $SABCD$ și planul (ABC).*

b) *Determinați tangenta unghiului dintre planele $\big(MAB'\big)$ și (SAB).*

Soluție.



a) Intersecția dintre suprafața cubului și planul paralel cu $\left(AA'D'D\right)$ care conține punctul S este pătratul $UU'V'V$, unde $U \in AB$ și $V \in CD$. Evident, $\sphericalangle\left(\left(SA'B'\right), \left(SC'D'\right)\right) = \sphericalangle\left(U'S, V'S\right)$, în consecință $\sphericalangle U'SV' = 30°$ sau $\sphericalangle U'SV' = 150°$. Punctul S se află în interiorul pătratului $UU'V'V$, deci $\sphericalangle U'SV'$ este interior cercului circumscris pătratului. Așadar obținem $\sphericalangle U'SV' > \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{U'V'} = 45° > 30°$, de unde rezultă că $\sphericalangle U'SV' = 150°$. **1p**

Se arată ușor că triunghiul USV este echilateral (alegem punctul S' în interiorul pătratului $UU'V'V$, astfel încât triunghiul UVS' să fie echilateral, și se arată că punctele S și S' coincid), în consecință $\sphericalangle\left(SU, \left(ABCD\right)\right) = \sphericalangle SUV = 60°$. **1p**

b) Cum triunghiurile $MA'A$ și $MA'B'$ sunt congruente (C.C.), deducem că $\sphericalangle MAA' = 30°$, deci $\sphericalangle MAD = 60°$. Așadar $\sphericalangle\left(MA, \left(ABCD\right)\right) = \sphericalangle\left(SU, \left(ABCD\right)\right) = 60°$.

Rezultă că $SU \parallel MA$, deci $SU \parallel \left(MAB'\right)$. **1p**
Așadar dreapta de intersecție a planelor $\left(MAB'\right)$ și (SAB) este paralelă cu SU și trece prin A, adică $\left(MAB'\right) \cap \left(SAB\right) = MA$. **1p**

Fie $T \in AM$, astfel încât $B'T \perp AM$.

Deoarece $AB \subset \left(SAB\right)$ și $AB \perp AM$, rezultă că $\sphericalangle\left(\left(MAB'\right), \left(SAB\right)\right) = \sphericalangle\left(B'T, AB\right)$. Cum $A'B' \parallel AB$, rezultă că $\sphericalangle\left(\left(MAB'\right), \left(SAB\right)\right) = \sphericalangle\left(B'T, A'B'\right) = \sphericalangle A'B'T$. **1p**

Egalând aria triunghiului isoscel MAB' scrisă în funcție de două baze, rezultă $B'T = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, unde a reprezintă latura cubului. Din triunghiul dreptunghic $TA'B'$, cu $\sphericalangle TA'B' = 90°$, deducem $A'T = \dfrac{a}{2}$, iar $\operatorname{tg}\left(\sphericalangle A'B'T\right) = \dfrac{A'T}{A'B'} = \dfrac{1}{2}$. **2p**

Problema 4. *Se consideră numărul natural n, cu $n \geqslant 2$. Spunem că numărul S este* special, *dacă pentru orice scriere a lui n sub forma $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, cu $k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$ și $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k$, există numerele $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ și $a_1n_1 + a_2n_2 + \ldots + a_kn_k = S$.*

a) *Arătați că numărul $n^2 - 2n$ **nu** este special.*

b) *Aflați toate numerele speciale.*

Soluție. a) Presupunem că numărul $n^2 - 2n$ este special. Deoarece $n = 1 + (n-1)$, căutăm $a, b \in \mathbb{N}$, cu $a < b$, astfel încât $n^2 - 2n = a \cdot 1 + b(n-1)$. **1p**

Cum $a < b$, rezultă că $n^2 - 2n = a + b(n-1) < b + b(n-1) = bn$, deci $b > n-2$, adică $b \geqslant n-1$. **1p**

În consecință, $n^2 - 2n = a + b(n-1) \geqslant b(n-1) \geqslant (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$, fals.

Așadar numărul $n^2 - 2n$ nu este special. **1p**

b) Dacă S este un număr special, atunci pentru scrierea $n = n$ există $a \in \mathbb{N}$, astfel încât $S = an$, deci S este un multiplu al lui n. **1p**

Fie $S = t \cdot n$, cu $t \in \mathbb{N}$. Pentru $k = 2$, $n_1 = 1$ și $n_2 = n-1$, numărul n se scrie $n = 1 + (n-1)$, și există $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, cu $a_1 < a_2$, astfel încât $S = t \cdot n = a_1 + a_2(n-1) < a_2 + a_2(n-1) = na_2$. Rezultă că $a_2 > t$, deci $a_2 \geqslant t+1$.

Din $t \cdot n = a_1 + a_2(n-1) \geqslant a_2(n-1) \geqslant (t+1)(n-1)$, obținem $t \geqslant n-1$. **1p**

Arătăm că pentru orice $p \in \mathbb{N}$, cu $p \geqslant n-1$, numărul $S_p = pn$ este special.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$, $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k$, astfel încât $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Avem:

$$S_{n-1} = n^2 - n = \left(n_1 + n_2 + \ldots + n_k\right)^2 - \left(n_1 + n_2 + \ldots + n_k\right) = n_1\left(n_1 - 1\right) + n_2\left(2n_1 + n_2 - 1\right) + \\ + n_3\left(2n_1 + 2n_2 + n_3 - 1\right) + \ldots + n_k\left(2n_1 + 2n_2 + \ldots + 2n_{k-1} + n_k - 1\right).$$

Numerele naturale $a_1 = n_1 - 1,\ a_2 = 2n_1 + n_2 - 1,\ \ldots,\ a_k = 2n_1 + 2n_2 + \ldots + 2n_{k-1} + n_k - 1$ sunt astfel încât $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ și $S_{n-1} = a_1n_1 + a_2n_2 + \ldots + a_kn_k$. **1p**

Pentru $p > n-1$, scriem $pn = n\big(n-1+p-n+1\big) = n(n-1)+n(p-n+1) = S_{n-1}+n(p-n+1)$. Cu numerele $a_1, a_2, \ldots, a_k$ alese anterior, deducem că:

$$S_p = pn = a_1n_1 + a_2n_2 + \ldots + a_kn_k + \big(n_1 + n_2 + \ldots + n_k\big)(p - k + 1),$$

deci $S_p = \big(a_1 + p - k + 1\big) \cdot n_1 + \big(a_2 + p - k + 1\big) \cdot n_2 + \ldots + \big(a_k + p - k + 1\big) \cdot n_k$.

Pentru $A_1 = a_1 + p - n + 1, A_2 = a_2 + p - n + 1, \ldots, A_k = a_k + p - n + 1$, obținem $0 < A_1 < A_2 < \ldots < A_k$ și $S_p = A_1n_1 + a_2n_2 + \ldots + a_kn_k$.

Așadar, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, cu $p \geqslant n - 1$, numerele $S_p = pn$ sunt speciale. **1p**