Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada de matematică-Etapa locală
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a VIII-a
Soluţii

Problema 1. Egalitatea din enunţ se scrie $\dfrac{1}{\sqrt{10x+y}-1}=\dfrac{10x+y}{100}$. Notând $z=\sqrt{10x+y}$, rezultă $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{z^2}{100}$. Cum $z^3-z^2-100=(z^3-125)-(z^2-25)=(z-5)(z^2+4z+20)$ şi $z^2+4z+20>0$ pentru orice z număr real, deducem că $z=5$. Atunci $\sqrt{10x+y}=5$ de unde $10x+y=25$. Aşadar $\overline{xy}=25$.

Problema 2.

a) Fie $O=AC\cap BD$. Deoarece piramida $SABCD$ este regulată $\triangle SAC$ este isoscel, deci $\widehat{QAO}\equiv\widehat{NCO}$. Cum $ABCD$ este pătrat, vom avea $[AO]\equiv[OC]$. Pe de altă parte, cum $\triangle SBC\equiv\triangle SDA$, vom avea $[BC]\equiv[DA]$, $\widehat{BCN}\equiv\widehat{DAQ}$, $\widehat{CNB}\equiv\widehat{DQA}=90°$, deci $\triangle BCN\equiv\triangle DAQ$. De aici obţinem că $[NC]\equiv[AQ]$, şi prin urmare $\triangle AQO\equiv\triangle CNO$. De aici rezultă $\widehat{QOA}\equiv\widehat{NOC}$. Se observă că $(SAC)\perp(ABCD)$ şi fie $F\in AC$, $NF\perp AC$, $R\in NF$. Avem $[NF]\equiv[FR]$ şi $OF\perp NR$, deci $\triangle NOR$ este isoscel şi $\widehat{NOC}\equiv\widehat{ROC}$ deci $\widehat{QOA}\equiv\widehat{ROC}$. Cum $R\in NF\subset(SAC)$, va rezulta Q, O, R coliniare, deci $\{O\}=QR\cap DB$, în consecinţă B, R, Q, D sunt coplanare.

b) Analog ca mai sus se arată că $[MB]\equiv[PD]$, deci $[SP]\equiv[SM]$. Din reciproca teoremei lui Thales rezultă că $PM\parallel DB$. Dar $ABCD$ pătrat, deci $DO\perp AC$. De asemenea $SO\perp DO$, deci $DO\perp(SAC)$. Cum $QR\subset(SAC)$, vom avea $QR\perp DO$, deci $DB\perp QR$. Atunci $PM\perp QR$ şi $m\left(\widehat{MP,RQ}\right)=90°$.

Problema 3. Din enunţ deducem că $9a^2-6a+9b^2-42b+46=0$. Prin urmare $(3a-1)^2+(3b-7)^2=4$. De aici obţinem $(3a-1)^2\le 4$ şi $(3b-7)^2\le 4$. Aşadar, $-2\le 3a-1\le 2$ şi $-2\le 3b-7\le 2$. Adunând ultimele două relaţii rezultă $-4\le 3a+3b-8\le 4$, de unde $4\le 3a+3b\le 12$, care prin împărţire la 3 devine $\frac{4}{3}\le a+b\le 4$.

Problema 4.

Fie $E\in BA$, $CE\perp BA$. Avem $[BC]\equiv[BD]$, $\widehat{CBE}\equiv\widehat{DBE}$ iar latura BE este comună, deci $\triangle CBE\equiv\triangle DBE$. In consecinţă $m\left(\widehat{BED}\right)=m\left(\widehat{BEC}\right)=90°$, deci $BE\perp ED$. In $\triangle BEC$ avem $m\left(\widehat{BEC}\right)=90°$ şi $m\left(\widehat{EBC}\right)=45°$, deci triunghiul este isoscel şi $[BE]\equiv[EC]$. Analog $[BE]\equiv[ED]$. In $\triangle BEC$ şi $\triangle CED$ avem $[BE]\equiv[EC]$, $[EC]\equiv[ED]$ şi $[BC]\equiv[CD]$. In concluzie $\triangle BEC\equiv\triangle CED$, deci $m\left(\widehat{CED}\right)=m\left(\widehat{BEC}\right)=90°$. Aşadar $CE\perp ED$ şi $CE\perp BA$, prin urmare $CE\perp(BAD)$. De aici rezultă $(ABC)\perp(ABD)$.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada de matematică-Etapa locală
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a VIII-a
Barem

Problema 1.

Oficiu 1p

$\frac{1}{\sqrt{10x+y}-1}=\frac{10x+y}{100}$ 1p

$z=\sqrt{10x+y}$, $\frac{1}{z-1}=\frac{z^2}{100}$ 1p

$z^3-z^2-100=(z^3-5^3)-(z^2-5^2)=(z-5)(z^2+4z+20)$ 2p

$z^2+4z+20>0$ pentru orice z număr real 2p

$\sqrt{10x+y}=5$ 1p

$10x+y=25$ 1p

$\overline{xy}=25$. 1p

Problema 2.

Oficiu 1p

$\{O\}=AC\cap BD$, $\triangle AQO\equiv\triangle CNO$ 1p

$\widehat{QOA}\equiv\widehat{ROC}$ şi Q, O, A, R, C coplanare, deci Q, O, R coliniare 2p

$\{O\}=QR\cap DB$; punctele B, R, Q, D sunt coplanare 2p

$PM\parallel DB$ 1p

$DB\perp QR$, deci $PM\perp QR$ 2p

$m\left(\widehat{MP,RQ}\right)=90^\circ$ 1p

Problema 3.

Oficiu 1p

$9a^2-6a+9b^2-42b+46=0$ 1p

$(3a-1)^2+(3b-7)^2=4$ 2p

$(3a-1)^2\leq 4$ şi $(3b-7)^2\leq 4$ 2p

$-2\leq 3a-1\leq 2$ şi $-2\leq 3b-7\leq 2$ 1,50p

$-4\leq 3a+3b-8\leq 4$ 1,50p

$4\leq 3(a+b)\leq 12$; se împarte la 3 .... 1p

Problema 4.

Oficiu 1p

$E\in BA$, $CE\perp BA$, $BE\perp ED$ 1p

$[BE]\equiv[EC]\equiv[ED]$ 2p

$\triangle BEC\equiv\triangle CED$ 2p

$m\left(\widehat{CED}\right)=m\left(\widehat{BEC}\right)=90^\circ$ 2p

$CE\perp(BAD)$ 1p

$(ABC)\perp(ABD)$ 1p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada de matematică-Etapa locală
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a VIII-a

Problema 1. Determinaţi numărul natural $\overline{xy}$ pentru care:

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{xy}}-1}=\overline{0,xy},$$

în sistemul zecimal.

GM 6/2010

Problema 2. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată, $AM \perp SB$, $M \in SB$, $BN \perp SC$, $N \in SC$, $CP \perp SD$, $P \in SD$, $DQ \perp SA$, $Q \in SA$ şi R simetricul lui N faţă de AC.

a) Demonstraţi că punctele B, R, Q, D sunt coplanare.

b) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele MP şi RQ.

GM 5/2012

Problema 3. Arătaţi că dacă

$$3a^2+3b^2-2a-14b+\frac{46}{3}=0,$$

unde a, $b \in \mathbb{R}$, atunci

$$\frac{4}{3} \le a+b \le 4.$$

***

Problema 4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât triunghiul BCD să fie echilateral iar $m\left(\widehat{ABC}\right)=m\left(\widehat{ABD}\right)=45^\circ$. Demonstraţi că planele (ABC) şi (ABD) sunt perpendiculare.

***

Notă:

1. Timp de lucru: 3 ore
2. Toate subiectele sunt obligatorii
3. Fiecare problemă se va nota cu puncte de la 1 la 10 (un punct din oficiu)