



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 8 Martie 2014

CLASA a XI-a

Problema 1. (a) Dați un exemplu de două matrice A și B din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Arătați că, dacă A și B sunt două matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $AB \neq BA$.

Gazeta Matematică

Problema 2. (a) Arătați că, dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție, astfel încât funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(2x)$, și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + f(4x)$, sunt continue pe \mathbb{R} , atunci și f este continuă pe \mathbb{R} .

(b) Dați un exemplu de funcție discontinuă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care are următoarea proprietate: există un interval $I \subset \mathbb{R}$, astfel încât, oricare ar fi a în I , funcția $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_a(x) = f(x) + f(ax)$, este continuă pe \mathbb{R} .

Problema 3. (a) Fie A o matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq aI_2$, oricare ar fi $a \in \mathbb{C}$. Arătați că o matrice X din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ comută cu matricea A , adică $AX = XA$, dacă și numai dacă există două numere complexe α și α' , astfel încât $X = \alpha A + \alpha' I_2$.

(b) Fie A , B și C trei matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $AB \neq BA$, $AC = CA$ și $BC = CB$. Arătați că C comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Problema 4. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ o funcție strict crescătoare. Arătați că:

(a) Există un șir descrescător de numere reale strict pozitive, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent la 0, astfel încât $y_n \leq 2y_{f(n)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

(b) Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător de numere reale, convergent la 0, atunci există un șir descrescător de numere reale, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent la 0, astfel încât $x_n \leq y_n \leq 2y_{f(n)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Etapa județeană — soluții și barem orientativ, clasa a XI-a

Problema 1. (a) Dați un exemplu de două matrice A și B din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Arătați că, dacă A și B sunt două matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, atunci ele nu comută, $AB \neq BA$.

Soluție. (a) De exemplu, matricele $A = \sqrt{3/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ îndeplinesc condiția din enunț. **3 puncte**

(b) Dacă matricele A și B ar comuta, atunci $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$, deci

$$|\det(A + iB)|^2 = \det(A + iB) \det(A - iB) = \det(A^2 + B^2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -5 < 0,$$

contradicție. **4 puncte**

Problema 2. (a) Arătați că, dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție, astfel încât funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(2x)$, și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + f(4x)$, sunt continue pe \mathbb{R} , atunci și f este continuă pe \mathbb{R} .

(b) Dați un exemplu de funcție discontinuă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care are următoarea proprietate: există un interval $I \subset \mathbb{R}$, astfel încât, oricare ar fi a în I , funcția $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_a(x) = f(x) + f(ax)$, este continuă pe \mathbb{R} .

Soluție. (a) Continuitatea lui f rezultă din identitatea $f(x) = (g(x) - g(2x) + h(x))/2$, $x \in \mathbb{R}$, și continuitatea funcțiilor g și h **2 puncte**

(b) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

este discontinuă în 0, dar $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_a(x) = f(x) + f(ax) = 0$, este continuă pe \mathbb{R} , oricare ar fi $a < 0$ **5 puncte**

Problema 3. (a) Fie A o matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq aI_2$, oricare ar fi $a \in \mathbb{C}$. Arătați că o matrice X din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ comută cu matricea A , adică $AX = XA$, dacă și numai dacă există două numere complexe α și α' , astfel încât $X = \alpha A + \alpha' I_2$.

(b) Fie A, B și C trei matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $AB \neq BA$, $AC = CA$ și $BC = CB$. Arătați că C comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Soluție. (a) Este evident că dacă X are forma din enunț, atunci X comută cu A . Reciproc, fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{pmatrix}$. Condiția $AX = XA$ implică

$$a_2 x'_1 = a'_1 x_2, \tag{1}$$

$$(a_1 - a'_2)x_2 + a_2(x'_2 - x_1) = 0, \quad (2)$$

$$(a_1 - a'_2)x'_1 + a'_1(x'_2 - x_1) = 0. \quad (3)$$

..... **2 puncte**

Întrucât A nu este de forma aI_2 , $a \in \mathbb{C}$, sau cel puțin unul dintre elementele a_2 , a'_1 este nenul sau $a_2 = a'_1 = 0$ și $a_1 \neq a'_2$.

În primul caz, fie $a_2 \neq 0$ — dacă $a'_1 \neq 0$, procedăm în mod analog. Exprimând pe x'_1 din relația (1) și pe x'_2 din relația (2), rezultă

$$X = \frac{x_2}{a_2}A + \left(x_1 - \frac{a_1}{a_2}x_2\right)I_2.$$

..... **1 punct**

În fine, dacă $a_2 = a'_1 = 0$ și $a_1 \neq a'_2$, atunci relația (2) implică $x_2 = 0$, iar relația (3) implică $x'_1 = 0$ și rezultă

$$X = \frac{x_1 - x'_2}{a_1 - a'_2}A + \frac{a_1x'_2 - a'_2x_1}{a_1 - a'_2}I_2.$$

..... **1 punct**

(b) Vom arăta că C este de forma γI_2 , unde γ este un număr complex, deci C comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să presupunem că C nu are această formă. Întrucât A și C comută, conform (a), există două numere complexe α și α' , astfel încât $A = \alpha C + \alpha' I_2$. În mod analog, există două numere complexe β și β' , astfel încât $B = \beta C + \beta' I_2$, deci $AB = BA$ — contradicție. **3 puncte**

Problema 4. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ o funcție strict crescătoare. Arătați că:

(a) Există un șir descrescător de numere reale, strict pozitiv, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent la 0, astfel încât $y_n \leq 2y_{f(n)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

(b) Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător de numere reale, convergent la 0, atunci există un șir descrescător de numere reale, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent la 0, astfel încât $x_n \leq y_n \leq 2y_{f(n)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluție. (a) Întrucât $f(0) > 0$ și f este strict crescătoare, rezultă că $f(n) > n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Considerăm șirul strict crescător $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de numere naturale, definit prin $n_0 = 0$ și $n_k = f(n_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}^*$ — monotonia acestui șir rezultă din proprietatea precedentă a lui f . Definim apoi șirul descrescător $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n = 2^{-k}$, $n_k \leq n < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ — monotonia și convergența la 0 ale acestui șir sunt evidente.

Pentru a demonstra inegalitatea $y_n \leq 2y_{f(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, este suficient să o demonstrăm pentru $n_k \leq n < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Deoarece f este strict crescătoare, $n_{k+1} = f(n_k) \leq f(n) < f(n_{k+1}) = n_{k+2}$, deci $y_{f(n)} = 2^{-k-1} = y_n/2$ **2 puncte**

(b) În mod evident, $x_n \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deoarece $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător și convergent la 0.

Reamintim șirul strict crescător $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de numere naturale, definit la punctul (a): $n_0 = 0$ și $n_k = f(n_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}^*$. Definim apoi șirul descrescător $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de numere reale pozitive, $z_0 = x_1$ și $z_k = \max(x_{n_k}, z_{k-1}/2)$, $k \in \mathbb{N}^*$ — monotonia acestui șir rezultă inductiv, folosind monotonia șirurilor $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ și $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. În plus, $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este convergent la 0: dacă există o infinitate de indici k , astfel încât $z_k = x_{n_k}$, atunci convergența la 0 a lui $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rezultă din

monotonia sa și convergența la 0 a lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; iar dacă există doar un număr finit de indici k , astfel încât $z_k = x_{n_k}$, atunci $z_k = z_{k-1}/2$ de la un rang încolo și din nou $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge la 0.

În fine, definim șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n = z_k$, $n_k \leq n < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Monotonia și convergența la 0 ale acestui șir rezultă din proprietățile corespunzătoare ale șirului $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Pentru a demonstra inegalitățile $x_n \leq y_n \leq 2y_{f(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, este suficient să le demonstrăm pentru $n_k \leq n < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Evident, $x_n \leq x_{n_k} \leq z_k = y_n$. Pe de altă parte, $n_{k+1} = f(n_k) \leq f(n) < f(n_{k+1}) = n_{k+2}$, deoarece f este strict crescătoare, deci $y_{f(n)} = z_{k+1} \geq z_k/2 = y_n/2$.

..... **5 puncte**