OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
21 februarie 2016
CLASA a VI–a

1. a) (3p) Fie fracţia : $\dfrac{1+2+3+...+n}{650-649+648-647+...+4-3+2-1}$, $n\in N^*$. Să se determine $n\in N^*$ astfel încât fracţia să fie echiunitară.

b) (4p) Determinaţi numerele naturale *m*, *n* şi *p*, nenule şi distincte, ştiind că:

$$\frac{4}{1+m}+\frac{9}{m+n}+\frac{30}{m+n+p}\geq 10.$$

2. (7p) Numerele naturale *a*, *b*, *m* verifică relația $2a + 6b - 5m = 0$.
Arătați că $a^2 + b^2$ se divide cu 5.

3. Fie unghiurile ∢AOB, ∢BOC, ∢COD, ∢DOA unghiuri în jurul punctului O astfel încât ∢AOB ≡ ∢COD, iar ∢AOM ≡ ∢BOC, unde M este un punct pe bisectoarea unghiului ∢AOD şi fie [ON semidreapta opusă semidreptei [OM.

a) (3p) Arătaţi că [ON este bisectoarea unghiului ∢BOC.

b) (4p) Determinaţi măsurile unghiurilor ∢AOB şi ∢AOD ştiind că m(∢DON) = 102°.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2 ore.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VI–a

1. a) (3p) Fie fracţia : $\frac{1+2+3+...+n}{650-649+648-647+...+4-3+2-1}$, $n\in N^*$. Să se determine $n\in N^*$ astfel încât fracţia să fie echiunitară.

Prof. Constantin Ciobîcă

b) (4p) Determinaţi numerele naturale *m*, *n* şi *p*, nenule şi distincte, ştiind că:

$$\frac{4}{1+m}+\frac{9}{m+n}+\frac{30}{m+n+p}\geq 10.$$

Prof. Dorel Ispăşoiu

Soluţie:

a) $650-649+648-647+...+4-3+2-1=\underbrace{1+1+...+1}_{de\ 325\ ori}=325$

$1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Fracţia devine $\frac{n\cdot(n+1)}{650}$. Ea este echiunitară dacă $n\cdot(n+1)=650$.

$650 = 2 \cdot 13 \cdot 5^2 = 25 \cdot 26 \Rightarrow n = 25$.

b) Avem $m,n,p\in N^*$, $m+1\geq 2,\ deci\ \frac{4}{1+m}\leq\frac{4}{2}=2$. De asemenea $m+n\geq 3,\ deci\ \frac{9}{m+n}\leq\frac{9}{3}=3$; $m+n+p\geq 6,\ deci\ \frac{30}{m+n+p}\leq\frac{30}{6}=5$

Adunând membru cu membru cele trei relaţii obţinem:

$\frac{4}{1+m}+\frac{9}{m+n}+\frac{30}{m+n+p}\leq 10$, deci $\frac{4}{1+m}+\frac{9}{m+n}+\frac{30}{m+n+p}=10$

Înseamnă că, în fiecare caz, trebuie îndeplinite egalităţile. Rezultă că *m* = 1, *n* = 2 şi *p* = 3.

Barem:

Calculul numitorului	**1p**
Calculul numărătorului	**1p**
Determinarea lui *n*	**1p**
$m+1\geq 2,\ deci\ \frac{4}{1+m}\leq\frac{4}{2}=2$	**2p**
$m+n\geq 3,\ deci\ \frac{9}{m+n}\leq\frac{9}{3}=3$	

$m+n+p \geq 6$, *deci* $\dfrac{30}{m+n+p} \leq \dfrac{30}{6} = 5$	
Adunând membru cu membru cele trei relaţii obţinem: $\dfrac{4}{1+m}+\dfrac{9}{m+n}+\dfrac{30}{m+n+p} \leq 10$, deci $\dfrac{4}{1+m}+\dfrac{9}{m+n}+\dfrac{30}{m+n+p} = 10$	**1 p**
Finalizare	**1 p**

2. **(7p)** Numerele naturale a, b, m verifică relația $2a + 6b – 5m = 0$.
Arătați că $a^2 + b^2$ se divide cu 5.

Gazeta Matematică nr. 3 / 2014

<u>Soluție:</u>

Relația dată se scrie: $2a + b + 5b = 5m$ de unde deducem că $5 \mid (2a + b)$ sau $5 \mid (2ab + b^2)$ **(1)**
Relația inițială se mai scrie:
$5a – 3a + 6b = 5m$ sau $5a – 3(a – 2b) = 5m$, de unde $5 \mid (a – 2b)$ sau $5 \mid (a^2 – 2ab)$ **(2)**
Din **(1)** și **(2)** deducem că $5 \mid (a^2 – 2ab) + (2ab + b^2)$, adică $5 \mid (a^2 + b^2)$.

Barem:

Scrierea relației sub forma $2a + b + 5b = 5m$ și deducerea $5 \mid (2ab + b^2)$	**3p**
Scrierea relației sub forma $5a – 3a + 6b = 5m$ și deducerea $5 \mid (a^2 – 2ab)$	**3p**
Finalizare: $5 \mid (a^2 – 2ab) + (2ab + b^2)$, adică $5 \mid (a^2 + b^2)$.	**1p**

3. Fie unghiurile ∢AOB, ∢BOC, ∢COD, ∢DOA unghiuri în jurul punctului O astfel încât ∢AOB ≡ ∢COD, iar ∢AOM ≡ ∢BOC, unde M este un punct pe bisectoarea unghiului ∢AOD și fie [ON semidreapta opusă semidreptei [OM.

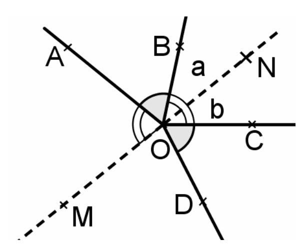
a) (3p) Arătaţi că [ON este bisectoarea unghiului ∢BOC.

b) (4p) Determinaţi măsurile unghiurilor ∢AOB şi ∢AOD ştiind că m(∢DON) = 102°.

Prof. Gheorghe Iacoviță

<u>Soluție:</u>

a) Notăm: m(∢BON) = a şi m(∢CON) = b;
m(∢AOM) = m(∢DOM) = m(∢BOC) = x,
m(∢AOB) = m(∢COD) = y.
Cum [OM şi [ON sunt semidrepte opuse, avem:
$x + y + a = 180°$ şi $x + y + b = 180°$, de unde $a = b$,
deci [ON este bisectoarea unghiului ∢BOC.



b) Din ipoteza problemei, unghiurile ∢AOB, ∢BOC, ∢COD, ∢DOA sunt unghiuri în jurul punctului O, deci $y + x + y + x + x = 360°$, adică $3x + 2y = 360°$ (**1**);

$y + \dfrac{x}{2} = 102°$, de unde $2y + x = 204° \Leftrightarrow 2y = 204° – x$ (**2**); înlocuind (2) în (1), obținem:

$3x + 204° – x = 360°$; $2x = 360° – 204°$; $2x = 156°$; $x = 78° \Rightarrow y = 63°$.

În concluzie: m(∢AOB) = 63° şi m(∢AOD) = $2x$ = 156°.

Barem:

a) m($\measuredangle$BON) = a şi m($\measuredangle$CON) = b; m($\measuredangle$AOM) = m($\measuredangle$DOM) = m($\measuredangle$BOC) = x, m($\measuredangle$AOB) = m($\measuredangle$COD) = y. Cum [OM şi [ON sunt semidrepte opuse: $x + y + a = 180°$ și $x + y + b = 180°$.	**2p**
Deduce că $a = b$, deci [ON este bisectoarea unghiului $\measuredangle$BOC.	**1p**
b) Scrie: $3x + 2y = 360°$ și $y + \frac{x}{2} = 102°$	**1p**
Găsește x și y	**2p**
Finalizare	**1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.