OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a VI-a

Subiecte:

1. Fie $a=\left(\frac{2013}{1}+1\right)\left(\frac{2013}{2}+1\right)\left(\frac{2013}{3}+1\right)\ldots\ldots\left(\frac{2013}{2014}+1\right)$

$$b=\left(\frac{2014}{1}+1\right)\left(\frac{2014}{2}+1\right)\left(\frac{2014}{3}+1\right)\ldots\ldots\left(\frac{2014}{2013}+1\right)$$

$$c=\frac{5+1}{5\cdot 1}+\frac{5+2}{5\cdot 2}+\frac{5+3}{5\cdot 3}+\cdots+\frac{5+20}{5\cdot 20}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$$

   a) Să se compare numerele a și b.
   b) Arătați că $4a=bc$.

2. Să se afle numerele a și n știind că a este număr prim, $n\in\mathbb{N}^*$ și $a^{2n}-5=4(5+5^2+\cdots+5^{2015})$.

Prof.Vlad Emil, Zimnicea

3. Să se arate că fracția $\frac{4^n\cdot 5^{2n+4}-1}{4^{n+4}\cdot 5^{2n}-1}$ este reductibilă pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

4. Fie $\widehat{AOB}$ un unghi cu măsura de 120°, Mşi N două puncte în interiorul său astfel încât M se află în interiorul unghiului $\widehat{AON}$, iar bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOM}$ şi $\widehat{BON}$ sunt perpendiculare.
   a) Să se determine măsura unghiului $\widehat{MON}$.
   b) Dacă P este un punct astfel încât $O\in(MP)$, să se arate că $\widehat{BOP}\equiv\widehat{AON}$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a VI-a

1. a) $a = \frac{2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot \ldots \cdot 4027}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2014} = \frac{2015 \cdot 2016 \cdot \ldots \cdot 4027}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2013}$ ……………………………2p

$b = \frac{2015 \cdot 2016 \cdot \ldots \cdot 4027}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2013}$ Deci $a = b$ ……………………………………..2p

b) $c = \left(\frac{5}{5 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 1}\right) + \left(\frac{5}{5 \cdot 2} + \frac{2}{5 \cdot 2}\right) + \cdots + \left(\frac{5}{5 \cdot 20} + \frac{20}{5 \cdot 20}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{20}\right) =$
$\left(1 + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{5}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4$ …………..2p

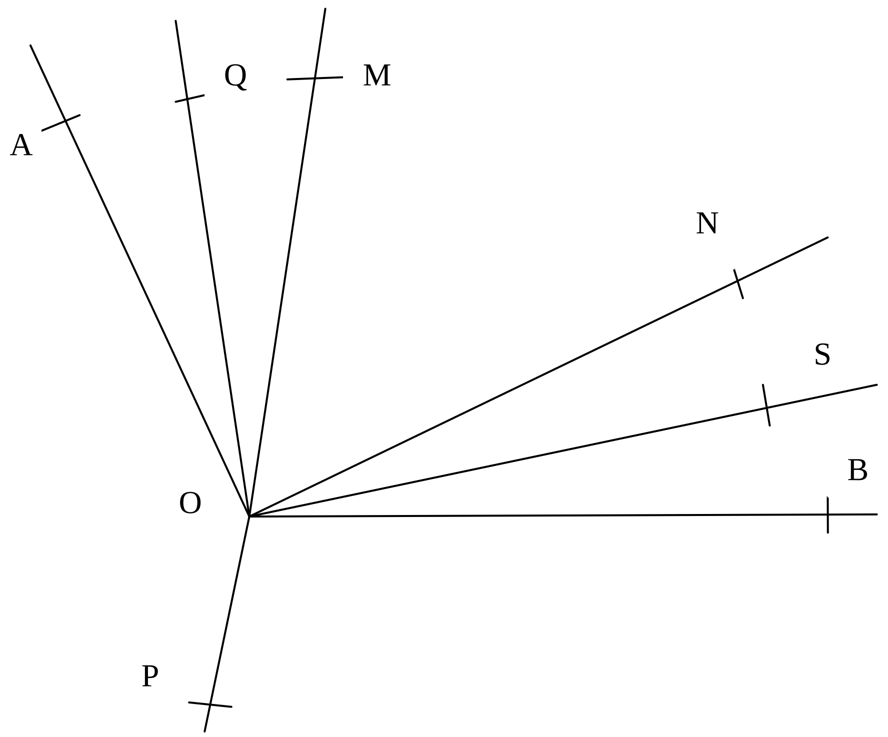
Deci $a = b, c = 4$ și $4a = bc$ ……………………………………………1p

2. $a^{2n} = 5 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + \cdots + 4 \cdot 5^{2015} = 5(1 + 4) + 4 \cdot 5^2 + \cdots + 4 \cdot 5^{2015} =$
$= 5^2(1 + 4) + 4 \cdot 5^3 + \cdots + 4 \cdot 5^{2015} = \cdots = 5^{2015} + 4 \cdot 5^{2015} = 5^{2016}$.....4p
Deci $a^{2n} = 5^{2016}$, a prim $\Rightarrow a = 5, n = 1008$ ……………………………3p

3. Fracția se scrie: $\frac{4^n \cdot 25^n \cdot 5^4 - 1}{4^n \cdot 25^n \cdot 4^4 - 1} = \frac{100^n \cdot 625 - 1}{100^n \cdot 256 - 1} = \frac{6250 \ldots 0 - 1}{2560 \ldots 0 - 1} = \frac{62499 \ldots 9}{25599 \ldots 9}$ ……….4p

Fracția se simplifică prin 3, numărătorul și numitorul având suma cifrelor divizibilă cu 3 ……………………………………………………………….3p
(se poate observa mai întâi proprietatea pentru $n = 0$, apoi în cazul general).

4.



a) Dacă $[OQ$ este bisectoarea lui $\widehat{AOM}, [OS$ bisectoarea lui $\widehat{BON}$, rezultă $m(\widehat{AOQ}) + m(\widehat{BOS}) = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$, deci $m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{BON}) = 60^\circ$ şi $m(\widehat{MON}) = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ ……………………………………………….4p

b) Va rezulta $m(\widehat{NOP}) = 180^\circ - m(\widehat{MON}) = 120^\circ$ şi $\widehat{NOP} \equiv \widehat{AOB}$ adică $\widehat{BOP} + \widehat{BON} = \widehat{AON} + \widehat{BON}$, deci $\widehat{BOP} \equiv \widehat{AON}$ ……………………….…..3p