OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a IX-a
16.02.2013

Subiectul I.(30 puncte)

Fie ABC un triunghi oarecare. Dacă A', B', C' sunt punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile, să se arate că are loc relația : $a\cdot\overrightarrow{AA'}+b\cdot\overrightarrow{BB'}+c\cdot\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

prof.Camelia Magdaş, Colegiul Național "Andrei Mureşanu" Dej

Subiectul II.(20 puncte)

Fie $a_k=\sqrt{4n^4+k}, n\in\mathbb{N}^*, k\in\mathbb{N}^*$ $si\ a=\sum_{k=1}^{8n^2}[a_k]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

a) Să se arate că a nu poate fi pătrat perfect $(\forall) n\in\mathbb{N}^*$;

b) Dacă $4n^2+1<2013<8n^2$ şi $a=\sum_{k=1}^{2013}[a_k]$, să se afle n astfel încât

a $-2013=2011\cdot 800$.

prof.Gorcea Violin, Liceul Teoretic"Avram Iancu",Cluj-Napoca

Subiectul III.(20 puncte)

Fie $x,y,z>0$. Să se arate că : $\frac{x+335\cdot y+335\cdot z}{x}+\frac{y+335\cdot x+335\cdot z}{y}+\frac{z+335\cdot x+335\cdot y}{z}\geq 2013$

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Mihai Viteazul" Turda

Subiectul IV.(20 puncte)

a) Arătați că $\{t\}+\{-t\}=0 \Leftrightarrow t\in Z$;

b) Rezolvați în R ecuația: $\left\{\frac{1-3x}{x+2}\right\}+\left\{\frac{2x-3}{x+2}\right\}=0$. Câte rădăcini întregi are ecuația?

prof. Ilie Diaconu, Liceul Teoretic "Avram Iancu" Cluj-Napoca

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

Barem clasa a IX-a
(OLM 2013-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC,notând $BA' = BC' = x, CB' = CA' = z, AC' = AB' = y$ avem $x+y=c, x+z=a, y+z=b$ de unde prin adunarea celor 3 relații şi înlocuirile corespunzătoare obținem
$x = \dfrac{a-b+c}{2}, y = \dfrac{b+c-a}{2}, z = \dfrac{a+b-c}{2}$. **(10 puncte)**

Obținem astfel că $\dfrac{BA'}{CA'} = \dfrac{a-b+c}{a+b-c}$, $\dfrac{BC'}{AC'} = \dfrac{a-b+c}{b+c-a}$ şi $\dfrac{CB'}{AB'} = \dfrac{a+b-c}{b+c-a}$. Folosind vectorii de poziție ,avem
$\overrightarrow{r_{A'}} = \dfrac{a+b-c}{2a}\overrightarrow{r_B} + \dfrac{a-b+c}{2a}\overrightarrow{r_C}$ $\quad \overrightarrow{r_{B'}} = \dfrac{a+b-c}{2b}\overrightarrow{r_A} + \dfrac{b+c-a}{2b}\overrightarrow{r_C}$ $\quad \overrightarrow{r_{C'}} = \dfrac{a-b+c}{2c}\overrightarrow{r_A} + \dfrac{b+c-a}{2c}\overrightarrow{r_B}$ **(10 puncte)**

Din cele 3 relații avem : $2a\cdot\overrightarrow{r_{A'}} + 2b\cdot\overrightarrow{r_{B'}} + 2c\cdot\overrightarrow{r_{C'}} = 2a\cdot\overrightarrow{r_A} + 2b\cdot\overrightarrow{r_B} + 2c\cdot\overrightarrow{r_C}$, adică
$a\cdot\left(\overrightarrow{r_{A'}} - \overrightarrow{r_A}\right) + b\cdot\left(\overrightarrow{r_{B'}} - \overrightarrow{r_B}\right) + c\cdot\left(\overrightarrow{r_{C'}} - \overrightarrow{r_C}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow a\cdot\overrightarrow{AA'} + b\cdot\overrightarrow{BB'} + c\cdot\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. **(10 puncte)**

Subiectul II.
a).Pentru $1 \le k \le 4n^2$ avem $\sqrt{4n^4} < \sqrt{4n^4+k} < \sqrt{4n^4+4n^2+1} \Rightarrow 2n^2 < \sqrt{4n^4+k} < 2n^2+1 \Rightarrow \left[\sqrt{4n^4+k}\right] = 2n^2$

Pentru $4n^2+1 \le k \le 8n^2$ avem
$\sqrt{4n^4+4n^2+1} \le \sqrt{4n^4+k} \le \sqrt{4n^4+8n^2} < \sqrt{4n^4+8n^2+4} \Rightarrow 2n^2+1 \le \sqrt{4n^4+k} < 2n^2+2 \Rightarrow [\sqrt{4n^4+k}] = 2n^2+1$.
Obținem $a = \sum_{k=1}^{4n^2}[a_k] + \sum_{k=4n^2+1}^{8n^2}[a_k] = 4n^2\cdot 2n^2 + 4n^2(2n^2+1) = 4n^2(4n^2+1)$ Numărul a reprezintă produsul a 2 numere naturale, consecutive nenule,deci a nu este pătrat perfect. **(10 puncte)**

b). $a = \sum_{k=1}^{2013}[a_k] = \sum_{k=1}^{4n^2}[a_k] + \sum_{4n^2+1}^{2013}[a_k] = 4n^2\cdot 2n^2 + (2013-4n^2)(2n^2+1) = 2n^2\cdot 2011 + 2013$.

Avem $a - 2013 = 2n^2\cdot 2011 \Rightarrow 2n^2\cdot 2011 = 2011\cdot 800 \Rightarrow n^2 = 400 \Rightarrow n = 20$. **(10 puncte)**

Subiectul III. În rezolvarea exercițiului se ține cont de inegalitatea : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2, \forall\, x, y > 0$. **(10 puncte)**

Suma este $= 3 + 335\cdot\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}\right) \ge 3 + 335\cdot 6 = 2013$ **(10 puncte)**

Subiectul IV.
a) „$\Rightarrow$" Presupunem că $t \notin Z$, atunci $[t] < t$, $[-t] < -t \Rightarrow \{t\} + \{-t\} = (t-[t]) + (-t-[-t]) > 0$, fals.

„$\Leftarrow$" Fie $t \in Z \Rightarrow -t \in Z \Rightarrow \{t\} = 0, \{-t\} = 0 \Rightarrow \{t\} + \{-t\} = 0$ **(10 puncte)**

b) Ecuația dată este echivalentă cu $\left\{\dfrac{-3(x+2)+7}{x+2}\right\} + \left\{\dfrac{2(x+2)-7}{x+2}\right\} = 0$ sau $\left\{-3 + \dfrac{7}{x+2}\right\} + \left\{2 - \dfrac{7}{x+2}\right\} = 0$
sau încă $\left\{\dfrac{7}{x+2}\right\} + \left\{-\dfrac{7}{x+2}\right\} = 0$. Conform punctului a) rezultă $\dfrac{7}{x+2} = k \in Z^*$, de unde $x = \dfrac{7-2k}{k} \in R$,
$k \in Z^*$. Deoarece $x = \dfrac{7-2k}{k} = \dfrac{7}{k} - 2$, rezultă că $x \in Z$ dacă $\dfrac{7}{k} \in Z$ adică pentru $k \in \{\pm 1, \pm 7\}$ ecuația are patru soluții întregi şi anume $x \in \{-9, -3, -1, 5\}$. **(10 puncte)**