

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ**

**28 februarie 2015**

**CLASA A VI-A**

- 1.) a) Dacă  $\overline{0,1(a)} + \overline{0,a(3)} = 0,3(5)$ , aflați valoarea lui  $a$ .
- b) Determinați numărul elementelor mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{a1b} + \overline{1b5}, 15 \mid x\}$
- 2.) Calculați media aritmetică a numerelor  $A$  și  $B$  știind că  $A = 81^{504} : 3^{2015}$ , iar  $B$  este cel mai mic număr natural nenul care împărțit la 12,  $\frac{15}{4}$  și 1,(7) dă, de fiecare dată, câtul număr natural și restul 0.
- 3.) Fie triunghiul  $ABC$ , iar  $D$  mijlocul segmentului  $AB$ . Perpendiculara în  $D$  pe  $AB$  intersectează latura  $BC$  în  $E$ .
- a) Arătați că triunghiul  $ABE$  este isoscel.
- b) Dacă  $AB = 14$  cm,  $BC = 18$  cm și perimetrul triunghiului  $AEB$  este 38 cm, calculați lungimea segmentului  $EC$ .
- 4.) Fie unghiul propriu  $AOB$  și punctele  $M$  în interiorul unghiului  $AOB$  și  $N$  în exteriorul unghiului  $AOB$ . Semidreapta  $[OP$  este bisectoarea unghiului  $AOM$ ,  $m(\sphericalangle POB) = 60^\circ$  și  $m(\sphericalangle BOM) = 2 \cdot m(\sphericalangle BON)$ . Dacă  $[OQ$  este bisectoarea unghiului  $AOP$ , să se arate că unghiul  $NOQ$  este drept.

**Notă:**

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.**

**Timp de lucru 3 ore**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ**

28 februarie 2015

**BAREM**

**CLASA A VI-A**

<b>1.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
<b>a)</b>	$\frac{1a-1}{90} + \frac{a3-a}{90} = \frac{35-3}{90}$	<b>2p</b>
	$10+a-1+10a+3-a=32, 10a=20, a=2$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$15 x \Rightarrow 5 x, 3 x, x = \overline{a1b} + \overline{1b5} \Rightarrow b = 0 \text{ vazy } b = 5$	<b>1p</b>
	Dacă $b = 0 \Rightarrow x = \overline{a10} + 105 \Rightarrow 3   \overline{a10} \Rightarrow a \in \{2,5,8\}$	<b>2p</b>
	Dacă $b = 5 \Rightarrow x = \overline{a15} + 155 \Rightarrow a \in \{1,4,7\}$	
	$x \in \{315,615,915,270,570,870\}$	<b>1p</b>
	card $A = 6$	<b>1p</b>
<b>2.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	$A = 81^{504} : 3^{2015} = (3^4)^{504} : 3^{2015} = 3^{2016} : 3^{2015} = 3^1 = 3$	<b>3p</b>
	$B$ trebuie să îndeplinească următoarele condiții:	<b>2p</b>
	$B : 12 \in \mathbb{N}, B : \frac{15}{4} = B \cdot \frac{4}{15} \in \mathbb{N}$ și $B : 1, (7) = B : \frac{16}{9} = B \cdot \frac{9}{16} \in \mathbb{N}$	
	Rezultă că $B = [12, 15, 16] = 16 \cdot 3 \cdot 5 = 240$ .	<b>3p</b>
	Media aritmetică a numerelor $A$ și $B$ este: $(A + B) : 2 = (240 + 3) : 2 = 121,5$ .	<b>1p</b>
<b>3.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
<b>a)</b>	Desen corect	<b>1p</b>
	$\left. \begin{array}{l} [AD] \equiv [DB] \\ \hat{A}DE \equiv \hat{B}DE \\ [DE] \equiv [DE] \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \equiv \triangle BDE$	<b>3p</b>
	$\triangle ADE \equiv \triangle BDE \Rightarrow [AE] \equiv [BE]$ . Deci triunghiul $ABE$ este isoscel.	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$P_{ABE} = 2 \cdot BE + AB$ . Deoarece $P_{ABE} = 38 \text{ cm}$ și $AB = 14 \text{ cm}$ , rezultă că $2BE + 14 \text{ cm} = 38 \text{ cm} \Rightarrow BE = (38 \text{ cm} - 14 \text{ cm}) : 2 = 12 \text{ cm}$ . Deci $EC = BC - BE = 18 \text{ cm} - 12 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$	<b>3p</b>
<b>4.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	Desen corect	<b>2 p</b>
	Notăm $m(\sphericalangle A O Q) = m(\sphericalangle Q O P) = a, a > 0$	<b>1 p</b>
	Avem $m(\sphericalangle A O P) = 2a, m(\sphericalangle A O M) = 4a$	<b>2 p</b>
	Din $m(\sphericalangle P O B) = 60^\circ$ avem $m(\sphericalangle B O M) = 60^\circ - 2a$	<b>1 p</b>
	$m(\sphericalangle B O N) = 30^\circ - a$	<b>1 p</b>
	$m(\sphericalangle N O Q) = m(\sphericalangle N O B) + m(\sphericalangle B O P) + m(\sphericalangle P O Q) = 30^\circ - a + 60^\circ + a = 90^\circ$	<b>2 p</b>