Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a XI-a

Subiect 1

Determinați numerele reale a și b astfel încât: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=\dfrac{3}{4}$.

Subiect 2

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, n\in N, x_0=0, x_1=1$

a) Arătați că $A^n=\begin{pmatrix}x_{n-1} & x_n\\ x_n & x_{n+1}\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in N^*$.

b) Arătați, folosind eventual punctul a), că $x_{n+1}x_{n-1}-x_n{}^2=(-1)^n$, pentru orice $n\in N^*$.

Subiect 3

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ și $C(A)=\{X\in M_3(C)\,/\,A\cdot X=X\cdot A\}$

a) Arătați că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b,c\in C$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că ecuația $X^3=O_3$ are o infinitate de soluții în $M_3(C)$.

c) Arătați că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(C)$.

Subiect 4

Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ si propozițiile :

(P_1) Șirul $x_n=a_{n+1}-a_n, n\in N^*$ este convergent la zero.

(P_2) Șirul $y_n=\max(a_n,a_{n+1}), n\in N^*$ este convergent

(P_3) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Arătați că:

a) P_1 nu implică P_3

b) P_2 nu implică P_3

c) P_1 și P_2 implică P_3.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a XI-a Barem

Subiectul 1 Determinați numerele reale a și b astfel încât: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=\dfrac{3}{4}$.

Soluție și barem

Dacă $\sqrt{2+a}-b>0$, $\lim\limits_{x\nearrow 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=-\infty$ si $\lim\limits_{x\searrow 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=\infty$.

Nu există limita dată, contradicție. Analog pentru $\sqrt{2+a}-b<0$. Rezultă $\sqrt{2+a}-b=0$.

Pentru $b=\sqrt{2+a}$,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(\sqrt{x^2-x+a}+\sqrt{2+a})}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+a}+\sqrt{2+a}}=\frac{3}{2\sqrt{2+a}}$$

Deci $\sqrt{2+a}=2\to a=2$. În concluzie $a=2$, $b=2$.

$\sqrt{2+a}$ - $b\neq 0$, imposibil..3p

$\sqrt{2+a}-b=0$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=\dfrac{3}{2\sqrt{2+a}}$ 2p

$\sqrt{2+a}=2\to a=2$ 1p

$b=\sqrt{2+a}$ =2..1p

Subiectul 2 Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, n\in N, x_0=0, x_1=1$

a) Arătați că $A^n=\begin{pmatrix}x_{n-1} & x_n\\ x_n & x_{n+1}\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in N^*$.

b) Arătați, folosind eventual punctul a), că $x_{n+1}x_{n-1}-x_n^{\ 2}=(-1)^n$, pentru orice $n\in N^*$.

Soluție și barem

a) Demonstrăm inductiv. Pentru $n=1$, trebuie arătat că $A=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, adevărat deoarece

$x_0=0, x_1=1, x_2=1$.

Fie $A^k=\begin{pmatrix} x_{k-1} & x_k \\ x_k & x_{k+1} \end{pmatrix}$, atunci $A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix} x_{k-1} & x_k \\ x_k & x_{k+1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_k & x_{k+1} \\ x_{k+1} & x_{k+2} \end{pmatrix}$, ceea ce trebuia arătat

b) Cum $\det(A^n)=(\det A)^n=(-1)^n$ și $\det(A^n)=x_{n+1}x_{n-1}-x_n^{\ 2}$, rezultă concluzia.

a) verificare 2p

$P(k)\to P(k+1)$ 2p

b) $\det(A^n)=(-1)^n$ 1p

$\det(A^n)=x_{n+1}x_{n-1}-x_n^{\ 2}$ 2p

Subiectul 3 Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $C(A)=\{X\in M_3(C)\,/\,A\cdot X=X\cdot A\}$

a) Arătați că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b,c\in C$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că ecuația $X^3=O_3$ are o infinitate de soluții în $M_3(C)$.

c) Arătați că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(C)$.

Soluție și barem

a) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Din $A\cdot X=X\cdot A$ rezultă $a=e=i, d=h, g\in C b=c=f=0$ și de aici concluzia.

b) De exemplu $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$, $b,c\in C$ sunt soluții.

c) Fie X soluție, atunci $X^4=A\cdot X=X\cdot A$, conform a) rezultă că $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$, apoi

$$X^3=\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2b & a^3 & 0 \\ 3ab^2+3a^2c & 3a^2b & a^3 \end{pmatrix}$$ şi din $X^3=A$ rezultă $a^3=0$; $3a^2b=1$; $3ab^2+3a^2c=2$, fals.

Prin urmare ecuația nu are soluție.

a)..3p

b)..2p

c)..2p

Subiectul 4 Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ si propozițiile :

(P_1) Șirul $x_n=a_{n+1}-a_n, n\in N^*$ este convergent la zero.

(P_2) Șirul $y_n=\max(a_n,a_{n+1}), n\in N^*$ este convergent

(P_3) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Arătați că:

a) P_1 nu implică P_3

b) P_2 nu implică P_3

c) P_1 şi P_2 implică P_3.

Soluție şi barem

Considerăm $a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$, atunci $x_n=\frac{1}{n+1}$ converge la zero şi $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent, $a_n\to\infty$

Considerăm $a_n=(-1)^n$, atunci $y_n=1$, deci este convergent pe când $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

Fie P_1 si P_2, adevărate. Atunci $y_n=\frac{a_{n+1}+a_n+|a_{n+1}-a_n|}{2}$ şi $a_{n+1}=a_n+x_n$. Deducem că

$2y_n=2a_n+x_n+|x_n|$, prin urmare $a_n=y_n-\frac{x_n+|x_n|}{2}$, deci convergent.

a) exemplu..2p

b) exemplu..2p

c)exemplu...3p 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.