Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA A XII-A

Problema 1

Fie funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1+\sin x-\cos x}{x+e^{x+2015}+\sin x}$. Determinaţi primitiva $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, ştiind că $F(0)=1$.

Problema 2

Pe intervalul $G_a=(a,+\infty)$ cu $a\in\mathbb{R}$, se defineşte legea de compoziţie $*$: $G_a\times G_a\to G_a$ prin $x*y=xy-ax-ay+a^2+a$.

a) Demonstraţi că $(G_a,*)$ este grup abelian.

b) Demonstraţi că oricare ar fi numărul real a, grupul $(G_a,*)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ al numerelor reale pozitive în raport cu înmulţirea.

c) Calculaţi $x_*^n=\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 3

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Dacă funcţiile $f_k:G\to G$, $f(x)=x^k, k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ sunt automorfisme ale grupului $(G,\cdot)$, demonstraţi că n este număr prim.

Problema 4

Determinaţi funcţiile derivabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiţii:

(1) derivata f' este continuă şi $0<f'(x)\leq 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$;

(2) $f(0)=0$

şi

(3) pentru o primitivă F a funcţiei f^2 cu $F(0)=0$, avem $F(1)=\dfrac{f^3(1)}{3}$.

***Notă**: Timp de lucru: 3 ore. Pentru fiecare problemă se acordă de la 0 la 7 puncte .*

Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA A XII-A

BAREM

Problema 1 Fie funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1+\sin x-\cos x}{x+e^{x+2015}+\sin x}$.

Determinaţi primitiva $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, ştiind că $F(0)=1$.

Problema 1 ***Soluţie şi barem***

$F(x)=\int\dfrac{x+e^{x+2015}+\sin x-1-e^{x+2015}-\cos x}{x+e^{x+2015}+\sin x}dx+C=$ 1p

$=\int\left(1-\dfrac{1-e^{x+2015}-\cos x}{x+e^{x+2015}+\sin x}\right)dx+C=\int\left(1-\dfrac{\left(x+e^{x+2015}+\sin x\right)'}{x+e^{x+2015}+\sin x}\right)dx+C=$

$=x-\ln\left(x+e^{x+2015}+\sin x\right)+C$ 4p

Din $F(0)=1$ rezultă că $C=2016$. Prin urmare $F(x)=x-\ln\left(x+e^{x+2015}+\sin x\right)+2016$......2p

Problema 2 Pe intervalul $G_a=(a,+\infty)$ cu $a\in\mathbb{R}$, se defineşte legea de compoziţie

$*: G_a\times G_a\to G_a$ prin $x*y=xy-ax-ay+a^2+a$.

a) Demonstraţi că $(G_a,*)$ este grup abelian.

b) Demonstraţi că oricare ar fi numărul real a, grupul $(G_a,*)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ al numerelor reale pozitive în raport cu înmulţirea.

c) Calculaţi $x_*^n=\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 2 ***Soluţie şi barem***

a) Se verifică axiomele grupului..............3p

b) Se arată că funcţia $f:G_a\to G_a$ definită de $f(x)=x-a$ este izomorfism de grupuri..............2p

c) $x*y-a=xy-ax-ay+a^2+a-a=(x-a)\cdot(y-a)$ pentru orice $x,y\in G_a$..............1p

Se arată prin inducţie că $x_*^n=a+(x-a)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$..............1p

Problema 3 Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Dacă funcțiile $f_k:G\to G$, $f(x)=x^k, k\in\{1,2,...,n-1\}$ sunt automorfisme ale grupului $(G,\cdot)$, demonstrați că n este număr prim.

Problema 3 ***Soluție și barem***

Fie p prim cu $p\mid n$ (există deoarece n este mai mare decât 2). Prin urmare există $x\in G$ astfel încât $ord(x)=p$ 2p

Dacă $p\in\{1,2,...,n-1\}$, din $x^p=e^p$, rezultă că $x=e$, în contradicție cu faptul că $ord(x)=p$ 3p

Prin urmare $p=n$ și n este număr prim..2p

Problema 4 Determinați funcțiile derivabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

(1) derivata f' este continuă și $0<f'(x)\leq 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$;

(2) $f(0)=0$ și

(3) pentru o primitivă F a funcției f^2 cu $F(0)=0$, avem $F(1)=\dfrac{f^3(1)}{3}$.

Problema 4 ***Soluție și barem***

Fie funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=f^2(x)-f'(x)f^2(x)$ și G o primitivă a funcției g cu $G(0)=0$, $G(x)=F(x)-\frac{1}{3}f^3(x)$..2p

Se verifică faptul că funcția G este crescătoare pe intervalul $[0,1]$..1p

Din relația $0=F(1)-\frac{1}{3}f^3(1)\geq F(x)-\frac{1}{3}f^3(x)\geq 0, \forall x\in[0,1]$ rezultă că $F(x)=\frac{1}{3}f^3(x)$ pentru orice $x\in[0,1]$..2p

Deoarece $f(x)>0, x\neq 0$ rezultă că $f^2(x)=f'(x)\cdot f^2(x)\Rightarrow f'(x)=1, \forall x\in(0,1]$. 1p

Prin urmare $f(x)=x+c$, iar din condiția (2) rezultă că $c=0$ 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.