

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A XI-A

1. a) Să se arate că există o infinitate de matrice $A \in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea $A^3 = 2A + I_2$, dar că doar două dintre ele au toate elementele numere naturale.

b) Să se arate că există o infinitate de matrice $A \in M_2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ cu proprietatea $A^3 = 2A$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

2. Considerăm o matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ care are următoarele proprietăți:

(1) A și A^3 au pe diagonala principală elementele $-1, 0, 1$ în această ordine;

(2) A^2 are pe diagonala principală elementele $1, 0, 1$ în această ordine.

Demonstrați că A este singulară, dar are cel puțin un minor de ordin 2 nenul.

Cristi Săvescu, București

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_n^2$, $\forall n \geq 0$. Aflați termenul general x_n al șirului și apoi calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Alexandru Gabriel Mîrșanu, Iași

4. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\arctg x} - \sqrt{\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}}{\sqrt[3]{1 + \ln[x(2x-1)]} - \sqrt[3]{1 + \ln(x^3 - 4x + 4)}}$.

Iulian Danielescu, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A XI-A - Soluții

1. a) Să se arate că există o infinitate de matrice $A \in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea $A^3 = 2A + I_2$, dar că doar două dintre ele au toate elementele numere naturale.

b) Să se arate că există o infinitate de matrice $A \in M_2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ cu proprietatea $A^3 = 2A$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție. $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 = \text{tr}(A) \cdot A - \det(A) \cdot I_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A^3 = \text{tr}(A) \cdot A^2 - \det(A) \cdot A = \text{tr}(A) [\text{tr}(A) \cdot A - \det(A) \cdot I_2] - \det(A) \cdot A =$
 $= (\text{tr}(A))^2 \cdot A - \text{tr}(A) \cdot \det(A) \cdot I_2 - \det(A) \cdot A = [(\text{tr}(A))^2 - \det(A)] \cdot A - \text{tr}(A) \cdot \det(A) \cdot I_2.$

a) Este suficient să găsim o infinitate de matrice $A \in M_2(\mathbb{Z})$ cu $(\text{tr}(A))^2 - \det(A) = 2$ și

$$\text{tr}(A) \cdot \det(A) = -1 \Rightarrow \det(A) = -\frac{1}{\text{tr}(A)} \Rightarrow (\text{tr}(A))^2 + \frac{1}{\text{tr}(A)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{tr}(A))^3 - 2\text{tr}(A) + 1 = 0 \Leftrightarrow [\text{tr}(A) - 1][\text{tr}(A) + \text{tr}(A) - 1] = 0.$$

Dar $A \in M_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow \text{tr}(A) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{tr}(A) = 1$ și $\det(A) = -1$.

Putem alege $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1+a-a^2 & 1-a \end{pmatrix}$ cu $a \in \mathbb{Z}$ arbitrar.

Pentru a găsi toate matricele cu elemente numere naturale, din

$$[(\text{tr}(A))^2 - \det(A)] \cdot A - \text{tr}(A) \cdot \det(A) \cdot I_2 = 2A + I_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\text{tr}(A))^2 - \det(A) - 2] \cdot A = [\text{tr}(A) \cdot \det(A) + 1] \cdot I_2 \Rightarrow A = \alpha I_2, \text{ sau}$$

$$(\text{tr}(A))^2 - \det(A) - 2 = \text{tr}(A) \cdot \det(A) + 1 = 0.$$

$$1. A = \alpha I_2 \Rightarrow A^3 = \alpha^3 I_2 \Rightarrow \alpha^3 I_2 = 2\alpha I_2 + I_2 \Leftrightarrow \alpha^3 = 2\alpha + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha \notin \mathbb{N}.$$

$$2. (\text{tr}(A))^2 - \det(A) - 2 = 0 \text{ și } \text{tr}(A) \cdot \det(A) + 1 = 0 \Rightarrow \text{tr}(A) = 1 \text{ și } \det(A) = -1.$$

Deci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a+d=1$ cu $a, d \in \mathbb{N} \Rightarrow (a, d) \in \{(1,0), (0,1)\} \Rightarrow ad=0 \Rightarrow bc=1$ cu

$$b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow (b, c) \in \{(1,1)\} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Este suficient să găsim o infinitate de matrice $A \in M_2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ cu $(\text{tr}(A))^2 - \det(A) = 2$ și $\text{tr}(A) \cdot \det(A) = 0$. Putem găsi A cu $\det(A) = 0$ și $\text{tr}(A) = \sqrt{2}$, de exemplu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \sqrt{k} \\ \frac{1}{4\sqrt{k}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix}, \text{ unde } k \in \mathbb{N}^* \text{ și nu este pătrat perfect.}$$

2. Considerăm o matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ care are următoarele proprietăți:

(1) A și A^3 au pe diagonala principală elementele $-1, 0, 1$ în această ordine;

(2) A^2 are pe diagonala principală elementele $1, 0, 1$ în această ordine.

Demonstrați că A este singulară, dar are cel puțin un minor de ordin 2 nenul.

Cristi Săvescu, București

Soluție. Considerăm $P = X^3 - \text{tr}(A)X^2 + \text{tr}(A^*)X - \det(A)$ polinomul caracteristic al matricei A . Din condițiile din ipoteză deducem că A^k are pe diagonala principală elementele $(-1)^k, 0^k, 1^k$ pentru $k=1, 2, 3$.

Cum $P(A) = O_3$ din relația Hamilton-Cayley, privind elementele de pe diagonală în această relație, deducem că $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$, adică $\det(A) = \text{tr}(A) = 0$ și deci $P = X^3 + \text{tr}(A^*)X$. Din $P(1) = P(-1) = 0$ rezultă că $\text{tr}(A^*) = -1$. Atunci $A^* \neq O_3$, de unde deducem că A are cel puțin un minor de ordin 2 nenul, altfel $A^* = O_3$.

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_n^2$, $\forall n \geq 0$. Aflați termenul general x_n al șirului și apoi calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Soluție. Se arată mai întâi inductiv că $x_n > 0$, $\forall n \geq 0$, apoi se logaritmează relația de recurență și se obține: $\ln x_{n+2} = \ln x_{n+1} + 2 \ln x_n$, $\forall n \geq 0$.

Notăm $\ln x_n = y_n$, $\forall n \geq 0 \Rightarrow y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n \Leftrightarrow y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$, $\forall n \geq 0$ cu $y_0 = \ln 1 = 0$ și $y_1 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$. Ecuația caracteristică a șirului are soluțiile -1 și 2 , deci

$y_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 2^n$, $\forall n \geq 0$. Pentru $n=0$ și $n=1$, avem $c_1 + c_2 = 0$ și

$$-c_1 + 2c_2 = -\ln 2 \Rightarrow 3c_2 = -\ln 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3} \ln 2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3} \ln 2 \Rightarrow$$

$$y_n = \frac{1}{3} \left[(-1)^n - 2^n \right] \ln 2, \quad \forall n \geq 0 \Leftrightarrow y_n = \frac{(-1)^n - 2^n}{3} \cdot \ln 2 \Leftrightarrow y_n = \ln 2^{\frac{(-1)^n - 2^n}{3}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Dar $x_n = e^{y_n} \Rightarrow x_n = 2^{\frac{(-1)^n - 2^n}{3}}$, $\forall n \geq 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2^{-\infty} = 0$.

4. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} - \sqrt{\arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right)}}{\sqrt[3]{1 + \ln [x(2x-1)]} - \sqrt[3]{1 + \ln (x^3 - 4x + 4)}}$.

Iulian Danielescu, Brăila

Soluție. Amplificând cu conjugata obținem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} x}{\sqrt{\operatorname{arctg} x} + \sqrt{\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 + \ln [x(2x-1)]}^2 + \sqrt[3]{1 + \ln [x(2x-1)]} \cdot \sqrt[3]{1 + \ln (x^3 - 4x + 4)} + \sqrt[3]{1 + \ln (x^3 - 4x + 4)}^2}{1 + \ln [x(2x-1)] - 1 - \ln (x^3 - 4x + 4)} \right] =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} x}{\sin \left(\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)} \right].$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\sin(\operatorname{arctg} x) \cos\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} x\right) - \cos(\operatorname{arctg} x) \sin\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} x\right)}{\ln \frac{2x^2 - x}{x^3 - 4x + 4}} \right] = \\
& = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{2x^2}{4}}}{\ln \left(1 + \frac{2x^2 - x - x^3 + 4x - 4}{x^3 - 4x + 4} \right)} = \\
& = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 2x^2 + 3x - 4}{\frac{-x^3 + 2x^2 + 3x - 4}{x^3 - 4x + 4}} \cdot \frac{-x^3 + 2x^2 + 3x - 4}{x^3 - 4x + 4} = \\
& = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x^2 - \sqrt{1 - \frac{2x^2}{4}} \right)}{-x^3 + 2x^2 + 3x - 4} = \\
& = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x^4}{4} - 1 + \frac{2x^2}{4}}{(x-1)(-x^2 + x + 4)} = \frac{3}{8\sqrt{\pi}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{2(x-1)} = \\
& = \frac{3}{16\sqrt{\pi}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + 2x + 2)}{x-1} = \frac{3 \cdot 6}{16\sqrt{\pi}} = \frac{9}{8\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$