Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Clasa a VI-a

Problema 1. Fie numerele naturale x şi y astfel încât fracţiile $\frac{7x-5y-3}{3x+9y-15}$ şi $\frac{1}{5}$ să fie echivalente. Să se determine valoarea expresiei $(16x-17y)^{2015}$.

Problema 2. Semidreptele $[OA$, $[OB$,$[OC$ şi $[OD$ formează trei unghiuri ce nu au interioare comune, $[OX$ este bisectoarea unghiului *AOB,* iar $[OY$ este bisectoarea unghiului *COD*. Dacă $[OX \perp [OY$, măsura unghiului *AOB* este mai mare decât măsura unghiului *BOC* de trei ori, iar măsura unghiului *COD* este egală cu măsura unghiului *BOC.* Să se determine măsura unghiului *BOC* şi măsura unghiului *AOD.*

Problema 3. Fie numerele $x=\frac{a}{b-2}$ şi $y=\frac{3b-6}{a-3}$. Să se determine perechile (a,b) de numere naturale astfel încât, x şi y să fie simultan numere naturale.

Problema 4. Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât B este mijlocul segmentului (AC) şi C este mijlocul segmentului (BD). Arătaţi că:

a) $BC=\frac{AC+BD}{4}$;
b) $\frac{1}{AC}+\frac{1}{BD}<\frac{4}{AD}$.

Gazeta Matematică

Notă. Timp de lucru 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 1 la 7 puncte.

Din oficiu se acordă 4 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Soluții și bareme orientative - Clasa a VI-a

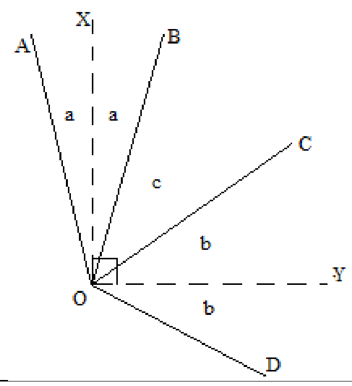
Problema 1. Fie numerele naturale x şi y astfel încât fracţiile $\frac{7x-5y-3}{3x+9y-15}$ şi $\frac{1}{5}$ să fie echivalente. Să se determine valoarea expresiei $(16x-17y)^{2015}$.

Soluție. 1p din oficiu

Fracţiile date sunt echivalente dacă $\frac{7x-5y-3}{3x+9y-15}=\frac{1}{5}$	**1p**
$5(7x-5y-3)=3x+9y-15$	**1p**
$35x-25y-15=3x+9y-15$	**1p**
$35x-25y=3x+9y$	**1p**
$32x=34y \Leftrightarrow 16x=17y$	**1p**
$(16x-17y)^{2015}=0$	**1p**

Problema 2. Semidreptele $[OA$, $[OB$,$[OC$ şi $[OD$ formează trei unghiuri ce nu au interioare comune, $[OX$ este bisectoarea unghiului AOB, iar $[OY$ este bisectoarea unghiului COD. Dacă $[OX \perp [OY$, măsura unghiului AOB este mai mare decât măsura unghiului BOC de trei ori, iar măsura unghiului COD este egală cu măsura unghiului BOC. Să se determine măsura unghiului BOC şi măsura unghiului AOD.

Soluție. 1p din oficiu

Figura 	**1p**
$[OX$ este bis. pt. $\angle AOB \Rightarrow m\angle(AOX) = m\angle(XOB) = a$	**1p**
$[OY$ este bis. pt. $\angle COD \Rightarrow m\angle(COY) = m\angle(YOD) = b$	**1p**

Dacă m∠ (BOC) =c , atunci $\left.\begin{array}{r}2a=3c\\ 2b=c\end{array}\right\}$. Dar $a+b+c=90^0 \Rightarrow \frac{3c}{2}+c+\frac{c}{2}=90^0$	**2p**
De unde $3c=90^0 \Leftrightarrow c=30^0$. Deci m∠ ($BOC$) = 30^0 şi m∠ (AOD) = m∠ (AOB) + m∠ (BOC) + m∠ (COD) = $= 90^0 + 30^0 + 30^0 = 150^0$.	**1p**

Problema 3. Fie numerele $x=\dfrac{a}{b-2}$ şi $y=\dfrac{3b-6}{a-3}$. Să se determine perechile (a,b) de numere naturale astfel încât, x şi y să fie simultan numere naturale.

Soluție. 1p din oficiu

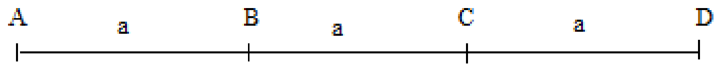
Dacă x şi y sunt numere naturale, atunci şi $x \cdot y = \dfrac{a}{b-2} \cdot \dfrac{3b-6}{a-3}$ este număr natural.	**1p**
Deci $x \cdot y = \dfrac{3a}{a-3} = \dfrac{3(a-3)+9}{a-3} = 3 + \dfrac{9}{a-3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a-3 \in \{1,3,9\} \Leftrightarrow$ $a \in \{4,6,12\}$.	**2p**
Dacă $a = 4 \Rightarrow \dfrac{4}{b-2} \in \mathbb{N}, \dfrac{3b-6}{1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \in \{3,4,6\}$ $\Rightarrow (a,b) \in \{(4,3),(4,4),(4,6)\}$	**1p**
Dacă $a = 6 \Rightarrow \dfrac{6}{b-2} \in \mathbb{N}, \dfrac{3b-6}{3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \in \{3,4,5,8\}$ $\Rightarrow (a,b) \in \{(6,3),(6,4),(6,5),(6,8)\}$	**1p**
Dacă $a = 12 \Rightarrow \dfrac{12}{b-2} \in \mathbb{N}, \dfrac{3b-6}{9} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \in \{5,8,14\}$ $\Rightarrow (a,b) \in \{(12,5),(12,8),(12,14)\}$	**1p**

Problema 4. Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât B este mijlocul segmentului (AC) şi C este mijlocul segmentului (BD). Arătaţi că:

a) $BC = \frac{AC+BD}{4}$;
b) $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BD} < \frac{4}{AD}$.

Gazeta Matematică

Soluție. 1p din oficiu

Figura 	**1p**
B este mijlocul segmentului (*AC*) atunci *AB =BC= a.*	**1p**
C este mijlocul segmentului (*BD*) atunci *BC =CD= a =AB.*	**1p**
De unde $BC = \frac{AC+BD}{4} \Leftrightarrow a = \frac{a+a}{2} = \frac{2a}{2} = a$ (A)	**1p**
$\frac{1}{AC} + \frac{1}{BD} < \frac{4}{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} < \frac{4}{3a} \Leftrightarrow \frac{2}{2a} < \frac{4}{3a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{4}{3a} \Leftrightarrow 3a < 4a$ (A)	**2p**