INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA **SSMR DÂMBOVIŢA**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 28.02.2015
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Determinaţi numerele raţionale x şi y ştiind că:

$$16{,}5 - \left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2|\right)^2 = 10\sqrt{2}$$

S.G.M. 2014

SUBIECTUL 2

Arătaţi că, dacă a, b, c sunt numere raţionale nenule, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$ atunci numărul $N = \left(\frac{ab}{c}+1\right)\left(\frac{bc}{a}+1\right)\left(\frac{ac}{b}+1\right)$ este nenegativ şi $\sqrt{N}$ este rational.

S.G.M. 2014

SUBIECTUL 3

În tetraedrul regulat ABCD, de muchie a, planul determinat de muchia AB şi mijlocul O al înălţimii [DG] intersectează muchia [DC] în punctul M. Aflaţi:

a) **Lungimile laturilor triunghiului ABM.**
b) **Sinusul unghiului diedru format de planul (ABM) cu planul (ABC).**

R.M.T.

SUBIECTUL 4

În paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu AB=24 cm, AD=AA'=6 cm, se consideră pe muchiile [AB], [A'B'] şi [D'C'] punctele M, N, P, astfel încât AM =6 cm, A'N=12 cm, D'P=18 cm.

a) **Stabiliţi natura patrulaterului MNPQ şi calculaţi-i aria, unde $\{Q\}=DC \cap (MNP)$.**
b) **Determinaţi distanţa de la punctul B la planul (MNP).**

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Determinaţi numerele raţionale x şi y ştiind că: $16,5-\left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}}-|y^2-2|\right)^2=10\sqrt{2}$.

Ecuaţia este echivalentă cu: $\left(\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert\right)^2=16,5-10\sqrt{2}$	**1p**
De unde $\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert=\pm\sqrt{16,5-10\sqrt{2}}$	**1p**
Sau: $\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert=\pm\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-2\right)$	**1p**
Ecuaţia $\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert=-\frac{5}{\sqrt{2}}+2 \Leftrightarrow \frac{\lvert x-1\rvert+5}{\sqrt{2}}=\lvert y^2-2\rvert+2$ nu are soluţii raţionale.	**1p**
Ecuaţia $\frac{\lvert x-1\rvert}{\sqrt{2}}-\lvert y^2-2\rvert=\frac{5}{\sqrt{2}}-2 \Leftrightarrow \frac{\lvert x-1\rvert-5}{\sqrt{2}}=\lvert y^2-2\rvert-2$.	**1p**
$\sqrt{2}$ fiind iraţional, avem: $\lvert x-1\rvert-5=0$ şi $\lvert y^2-2\rvert-2=0$. De unde $x\in\{-4; 6\}$ şi $y\in\{-2; 0; 2\}$	**1p**
Se obţine $S=\{(-4; -2), (-4; 0), (-4; 2), (6; -2), (6; 0), (6; 2)\}$.	**1p**

SUBIECTUL 2

Arătaţi că, dacă a, b, c sunt numere raţionale nenule, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$**, atunci numărul**

$N=\left(\frac{ab}{c}+1\right)\left(\frac{bc}{a}+1\right)\left(\frac{ac}{b}+1\right)$ **este nenegativ şi** $\sqrt{N}$ **este raţional.**

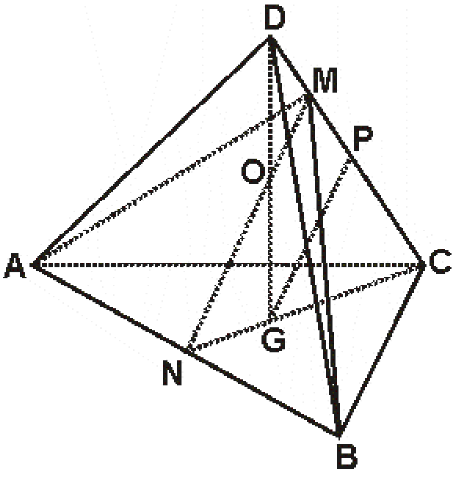
Din relaţia dată se obţine $ab+bc+ca=abc$, de unde $\frac{ab}{c}=ab-a-b$	**1p**
Apoi $\frac{ab}{c}+1=ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$.	**2p**
De unde $N=(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2\geq 0$.	**2p**
Şi $\sqrt{N}=\lvert(a-1)(b-1)(c-1)\rvert\in\mathbb{Q}$.	**2p**

SUBIECTUL 3

În tetraedrul regulat ABCD, de muchie a, planul determinat de muchia AB şi mijlocul O al înălţimii [DG] intersectează muchia [DC] în punctul M. Aflaţi:

a) **Lungimile laturilor triunghiului ABM.**

b) **Sinusul unghiului diedru format de planul (ABM) cu planul (ABC).**

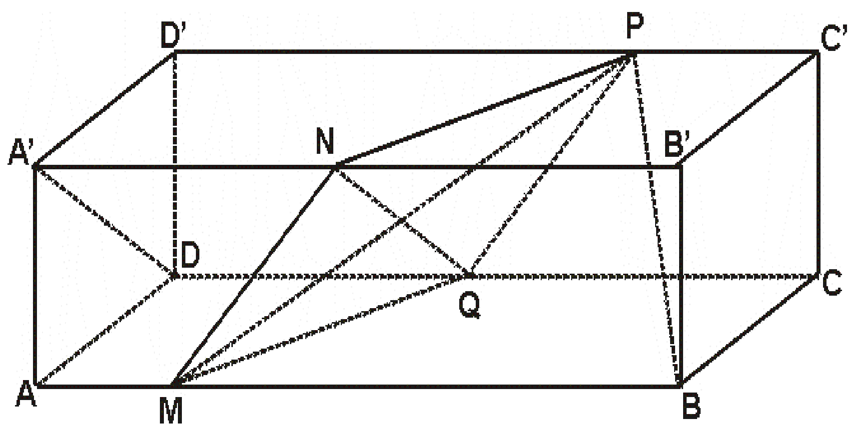
<table>
<tr><td rowspan="5">
</td><td>Fie N mijlocul lui [AB] şi PG || MN, $P\in[DC]$.</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>OM || GP şi OD=OG $\Rightarrow$ DM = MP şi atunci DP=2MP.
Apoi PG || MN $\Rightarrow \frac{PC}{MP}=\frac{GC}{GN}=2$ şi atunci PC=2MP.
Vom avea DP=PC=GP=$\frac{a}{2}$. Şi MN=$\frac{3}{2}PG=\frac{3a}{4}$.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>Se obţine din ΔMAN sau ΔMAP că MA=$\frac{a\sqrt{13}}{4}$=MB.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$MN\perp AB$, $CN\perp AB$, rezultă unghiul diedru se află din ΔONG şi avem
$\sin(\sphericalangle ONG)=\frac{OG}{ON}=\frac{a\sqrt{6}}{6}:\left(\frac{3a}{4}-\frac{a}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$.</td><td>2p</td></tr>
</table>

SUBIECTUL 4

În paralelipipedul dreptunghic ABCDA’B’C’D’ cu AB=24 cm, AD=AA’=6 cm, se consideră pe muchiile [AB], [A’B’] şi [D’C’] punctele M, N, P, astfel încât AM=6 cm, A’N=12 cm, D’P=18 cm.

a) Stabiliţi natura patrulaterului MNPQ şi calculaţi-i aria, unde $\{Q\}=DC \cap (MNP)$.

b) Determinaţi distanţa de la punctul B la planul (MNP).

	a) Punctele de intersecţie dintre (MNP) şi dreptele AB, A’B’, D’C’ şi DC formează un paralelogram, dar prin calcul MN=NP=$6\sqrt{2}$, rezultă MNPQ romb.	**2p**
	Cum AM+D’P=A’N+DQ, rezultă DQ=12 cm=A’N şi atunci NQ=A’D=$6\sqrt{2}$. Rombul este format din două triunghiuri echilaterale. Aria rombului = $2 \cdot \frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$.	**2p**
b) BP=$6\sqrt{3}$, MP=$6\sqrt{6}$ şi MB=18, rezultă din reciproca teoremei lui Pitagora BP $\perp$ MP, dar NQ || A’D şi A’D $\perp$ (ABC’D’), rezultă BP $\perp$ NQ, MP şi NQ fiind concurente dă că BP $\perp$ (MNP).		**2p**
Distanţa de la B la (MNP) fiind BP=$6\sqrt{3}$.		**1p**