# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
## Etapa locală, 16.02.2014
## Clasa a VIII-a

***Subiecte:***

1. Fie $a$ și $b$ numere strict pozitive care verifică relația: $a^2+b^2=1$.
   a) Să se arate că $ab \leq \frac{1}{2}$ .
   b) Să se arate că $\sqrt{a^4+4b^2}+\sqrt{b^4+4a^2}$ = 3 .
   c) Să se determine intersecția și reuniunea intervalelor
   $I_1=(-\infty, \frac{a+b}{2}]$ și $I_2=\left[\sqrt{ab}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ .

2. a) Să se determine valoarea maximă a expresiei
$$E(x)=\frac{5x^2+10\sqrt{3}x+23}{x^2+2\sqrt{3}x+4}, \qquad x\in\mathbb{R}$$
   b) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ care verifică relația :
   $5x^2+10\sqrt{3}x+23=\left(x^2+2\sqrt{3}x+4\right)\left(2y^2+4\sqrt{6}y+20\right)$.

Prof. Negreanu Pantelimon, Alexandria

3. Pe perpendicularele duse în vârfurile $A, B, C, D$ pe planul paralelogramului $ABCD$, de aceeași parte a lui, se iau punctele coplanare $A', B', C'$ respectiv $D'$. Se cunosc $m\left(\widehat{BAD}\right)=60°, AB=AA'=2a,\ AD=BB'=a$ și $CC'=\frac{a}{2}$ .
   a) Să se arate că $A'B'C'D'$ este paralelogram.
   b) Să se determine distanța de la $D'$ la $BC$.

Prof. Negreanu Pantelimon, Alexandria

4. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB>BC$. În punctul $A$ se ridică perpendiculara pe planul dreptunghiului, pe care se consideră punctul $M$. Dacă $P$ este proiecţia lui $D$ pe $MC$, iar $N$ proiecţia lui $B$ pe $MC$, să se arate că $NP\cdot MC=AB^2-AD^2$.

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.*

**Barem clasa a VIII-a**

1. a) Din $2ab \le a^2 + b^2$ rezultă relația ......................................... 2p

b) $\sqrt{a^4+4b^2}+\sqrt{b^4+4a^2} = \sqrt{a^4+4(1-a^2)}+\sqrt{b^4+4(1-b^2)} =$
$= \sqrt{a^4-4a^2+4}+\sqrt{b^4-4b^2+4} = \sqrt{(a^2-2)^2}+\sqrt{(b^2-2)^2} =$
$=|a^2-2|+|b^2-2| = 2-a^2+2-b^2 = 4-(a^2+b^2) = 3$ ...............3p
(am folosit $a^2 < a^2+b^2 = 1$)

c) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \le 2(a^2+b^2)$ deci $(a+b)^2 \le 2$ și $a+b \le \sqrt{2}$

Deci $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{1}{2}}$

Dacă $a \ne b$ va rezulta $I_1 \cap I_2 = \left[\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right]$ și $I_1 \cup I_2 = \left(-\infty, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ .......1p

Dacă $a = b$ rezultă $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , $I_1 = \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $I_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $I_1 \cup I_2 = \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ și $I_1 \cap I_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$...............................................................1p

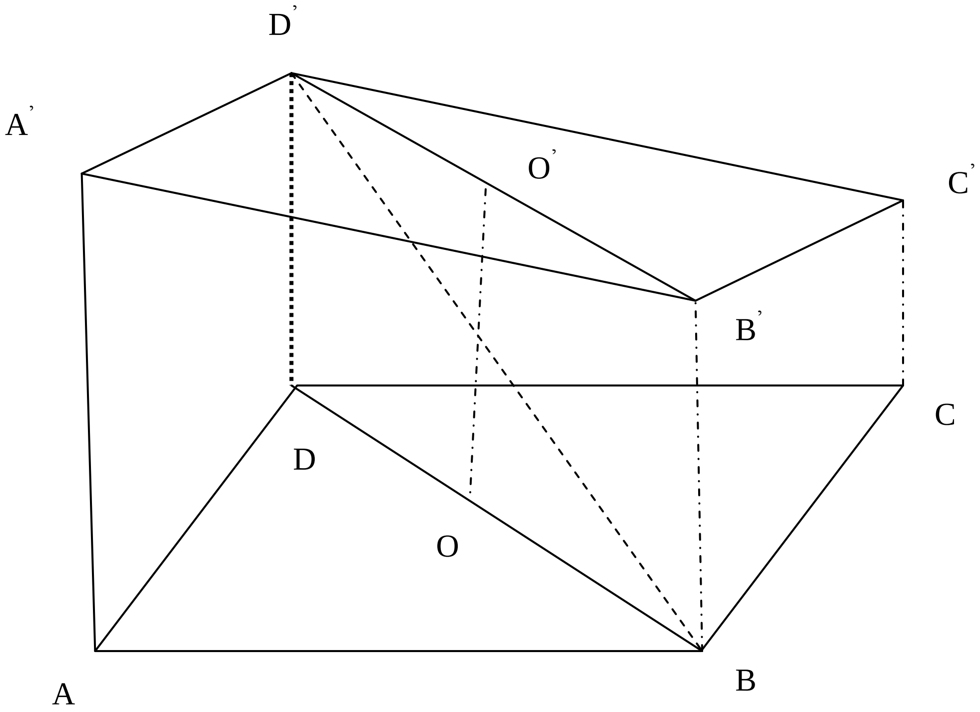
2.a) $E(x) = \frac{5(x^2+2\sqrt{3}x+4)+3}{x^2+2\sqrt{3}x+4} = 5 + \frac{3}{(x+\sqrt{3})^2+1}$ ..........................2p

Deoarece $(x+\sqrt{3})^2 \ge 0$ , valoarea maximă se realizează pentru $x+\sqrt{3} = 0$ și este egală cu 8.................................................... 2p

b) Relația se scrie sub forma echivalentă
$$\frac{5x^2+10\sqrt{3}x+23}{x^2+2\sqrt{3}x+4} = 2y^2 + 4\sqrt{6}y + 20$$

Deoarece $\frac{5x^2+10\sqrt{3}x+23}{x^2+2\sqrt{3}x+4} \le 8$, conform punctului a), iar $2y^2+4\sqrt{6}y+20 =$ $= 2(y^2+2\sqrt{6}y+6)+8 = 2(y+\sqrt{6})^2+8 \ge 8, \forall\, y \in \mathbb{R}$, egalitatea va avea loc pentru $x = -\sqrt{3}$ și $y = -\sqrt{6}$...............................................3p

3.

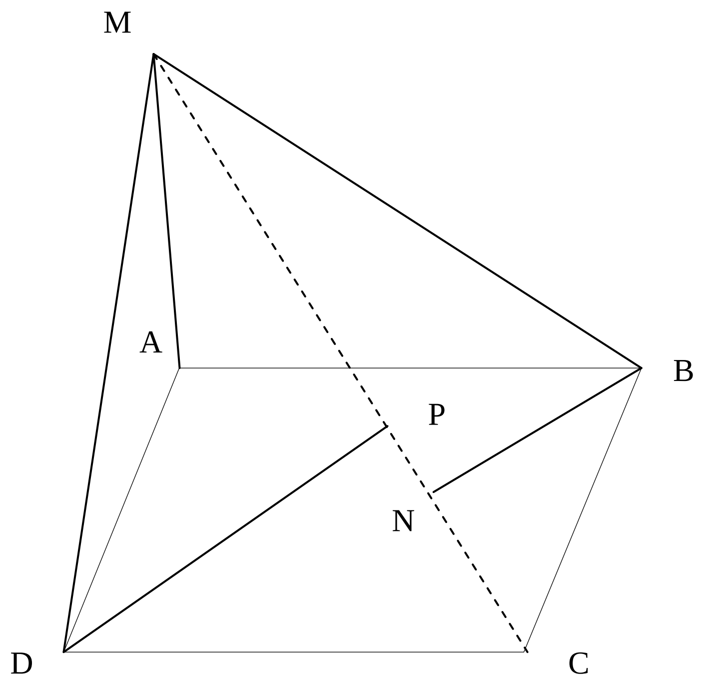



a) Deoarece $AB \parallel CD$ rezultă $AB \parallel (CDD')$, iar din $BB' \parallel DD' \Rightarrow BB' \parallel (CDD')$, deci planele $(ABB')$ și$(CDD')$ sunt paralele. Ele sunt intersectate de planul $A'B'C'$ după drepte paralele, deci $A'B' \parallel C'D'$ . Analog,din $(BCC') \parallel (ADD')$ rezultă $A'D' \parallel B'C'$, deci $A'B'C'D'$ este paralelogram ……………………………………………………………………………2p

b) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ va rezulta $\{OO'\}$ linie mijlocie în trapezele $ACC'A'$ și $BDD'B'$ deci $AA' + CC' = BB' + DD'$ de unde se obține $DD' = \frac{3a}{2}$ ………………………………………………………….2p
Din $AB = 2AD, m(\widehat{BAD}) = 60°$, va rezulta $m(\widehat{ADB}) = 90°$( considerând $E$ astfel încât $D$ mijlocul lui $(AE)$, va rezulta $\triangle\, BAE$ echilateral, iar $BD \perp AE$). Deci $DB \perp BC$ ………………………………………………..2p
Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $D'B \perp BC$ iar în triunghiul dreptunghic $DBD'$, $D'B = \sqrt{3a^2 + \frac{9a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$ (distanța de la $D'$ la $BC$)
…………………………………………………………………………..1p

4. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $MB \perp BC, MD \perp DC$. …….2p

Aplicând teorema catetei în triunghiurile dreptunghice $MDC$ şi $MBC$ rezultă $DC^2 = CP \cdot MC,\ BC^2 = CN \cdot MC$ ( avem $CN < CP$ deoarece $BC < AB$, deci $BC < DC$ ) …………………….……………………………………....3p




Scăzând relațiile, obținem $DC^2 - BC^2 = (CP - CN) \cdot MC = NP \cdot MC$. Deoarece $[DC] \equiv [AB],\ [BC] \equiv [AD]$, rezultă relația din enunț. ………………………………………………………………………………2p