OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015

CLASA A IX-A

1.) Să se demonstreze că oricare ar fi $a, b, c \in R_+^*$, sunt adevărate următoarele inegalităţi:

a) $a^3 + b^3 \geq a^2 b + ab^2$

b) $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$

2.) Se consideră numărul $y_n = \frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{9}{2 \cdot 3} + \frac{15}{3 \cdot 4} + ... + \frac{n^2 - n + 3}{(n-1) \cdot n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Pentru $n \geq 4$ să se calculeze $[y_n]$ şi $\{y_n\}$.

3.) Se dă triunghiul ABC în care $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ și punctele $M \in BC$, $N \in AC$ și $P \in AB$ care satisfac condiţiile: $(BM) \equiv (MC)$, $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle CBN$, $AM \cap BN = \{S\}$, $CS \cap AB = \{P\}$. Să se calculeze raportul ariilor triunghiurilor SNP şi SBC.

4.) Se dă şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}$. Dacă $b_n = \frac{a_n}{n}$, demonstraţi că $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015
BAREM
CLASA A IX-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$ adevărat pentru $\forall\, a,b,c \in R_+^*$	**3p**
b)	Din **a)** rezultă că $a^3+b^3+abc \geq ab(a+b+c)$ În mod analog: $b^3+c^3+abc \geq bc(a+b+c)$, $c^3+a^3+abc \geq ca(a+b+c)$.	**3p**
	De unde avem $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq$ $\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{1}{abc}$.	**3p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Avem: $\frac{n^2-n+3}{(n-1)n}=\frac{n^2-n}{(n-1)n}+3\frac{1}{(n-1)n}=1+3\frac{1}{(n-1)n}=1+3\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$	**3p**
	De unde $y_n=n-1+3\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=n-1+3\left(1-\frac{1}{n}\right)=n+2-\frac{3}{n}=n+1+\frac{n-3}{n}$	**4p**
	Pentru $n \geq 4$ avem $\left[\frac{n-3}{n}\right]=0$ de unde rezultă $[y_n]=n+1$şi $\{y_n\}=y_n-[y_n]=\frac{n-3}{n}$	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	$AM \cap BN \cap CP=\{S\}$, conform teoremei lui Ceva $\frac{NA}{NC}\cdot\frac{MC}{MB}\cdot\frac{PB}{PA}=1$.	**2p**
	Însă $\frac{MB}{MC}=1$, rezultă că $\frac{NA}{NC}=\frac{PA}{PB}$de unde obținem $PN \parallel BC$	**2p**
	$\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle CBN \Rightarrow BN$ bisectoare $\Rightarrow \frac{NA}{NC}=\frac{BA}{BC}=\frac{2}{3}$. Din $\frac{NA}{NC}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{NA}{AC}=\frac{2}{5}$	
	Din $PN \parallel BC \Rightarrow$ $APN_\Delta \sim ABC_\Delta$ de unde $\frac{PN}{BC}=\frac{AN}{AC}=\frac{2}{5}$	**2p**
	Din $PN \parallel BC$ $\Rightarrow$ $SNP_\Delta \sim SBC_\Delta$, deci $\frac{A_{SNP}}{A_{SBC}}=\left(\frac{PN}{BC}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$.	**3p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	$a_2=3a_1=\frac{2\cdot 3}{2}a_1$	**2p**
	$a_3=\frac{3\cdot 4}{2}a_1$	**2p**
	Se demonstrază cu inducţie că $a_n=\frac{n(n+1)}{2}a_1$ de unde rezultă că $b_n=\frac{n+1}{2}a_1$	**4p**
	Cum $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}a_1$ rezultă că $(b_n)_{n\geq 1}$este o progresie aritmetică cu raţia $\frac{1}{2}a_1$	**1p**