Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a X-a

Subiectul 1.

a) Calculați $(\sqrt{5}-1)^3$.

b) Determinați câte numere naturale nenule n verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<1-2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Subiectul 2.

Dacă $a_k \in (0,1)$, $k=\overline{1,n}$, $n\in \mathbb{N}^*$, demonstrați inegalitatea:

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\ge n.$$

Subiectul 3.

a) Dacă $a, z, z' \in \mathbb{C}$, arătați că $|z+a|+|z'+a|\ge|z-z'|$.

b) Dacă $a, z\in\mathbb{C}, |z|=1, n\in\mathbb{N}^*$, arătați că $\sum_{k=1}^{2n}\left|z^k+a\right|\ge n|z-1|$.

Subiectul 4.

Fie A un punct al cercului cu centrul în originea reperului cartezian xOy și de rază 1, astfel încât $\mu\left(\widehat{xOA}\right)=\frac{\pi}{6}$.

a) Determinați ecuația binomă de grad minim, având coeficienți reali, pentru care una dintre rădăcini să fie afixul punctului A;

b) Aflați aria poligonului cu vârfurile A_k, unde A_k sunt imaginile geometrice ale ecuației de la punctul a).

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

Clasa a X-a

Subiectul 1.

a) Calculați $(\sqrt{5}-1)^3$.

b) Determinați câte numere naturale nenule n verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<1-2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Soluție și barem

a) $(\sqrt{5}-1)^3=8\sqrt{5}-16$ 1p

b) Se amplifică fiecare fracție din membrul stâng cu expresia conjugată și după reducerea termenilor se obține inegalitatea : $\sqrt[3]{n+1}-1<1-2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 2p

Din a) inegalitatea se mai poate scrie : $\sqrt[3]{n+1}<1+\sqrt{5}$ 1p

Prin ridicare la cub urmează că n $<$ $15+8\sqrt{5}$ 1p

Cum $15+8\sqrt{5}\in(32,33)\Rightarrow n\in\{1,2,\ldots,32\}$, deci sunt 32 numere..2p

Subiectul 2. Dacă $a_k\in(0,1)$, $k=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, demonstrați inegalitatea:

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\geq n.$$

Soluție și barem

Se aplică inegalitatea dintre media armonică și media geometrică obținându-se n inegalități:

$$\log_{a_i}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\geq\log_{a_i}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\frac{\log_{a_i}(a_1a_2\ldots a_n)}{n},\ i=\overline{1,n}$$ 2p

Prin adunare membru cu membru se obține:

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\geq$$

$$\frac{n+(\log_{a_1}a_2+\log_{a_2}a_1)+\cdots+(\log_{a_n}a_{n-1}+\log_{a_{n-1}}a_n)}{n}$$ 2p

Aplicând inegalitatea $\log_{a_i}a_j+\log_{a_j}a_i\geq 2$ pentru toate parantezele din expresia anterioară se obține

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

$$\geq\frac{n+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 2+\cdots+2}{n}$$ și în continuare rezultă inegalitatea cerută...2p

Semnul „=” are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 1p

Subiectul 3. a) Dacă $a, z, z' \in \mathbb{C}$, arătați că $|z+a| + |z'+a| \geq |z-z'|$.

b) Dacă $a, z \in \mathbb{C}, |z| = 1, n \in \mathbb{N}^*$, arătați că $\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq n|z-1|$.

Soluție și barem

a) $|z| = |-z| \Rightarrow |z+a| + |z'+a| \geq |z+a| + |-z'-a|$ 2p

$|z+a| + |z'+a| \geq |z+a-z'-a| = |z-z'|$ 1p

b) $\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| = |z^{2n} + a| + |z^{2n-1} + a| + \ldots + |z^2 + a| + |z + a|$ 1p

$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq |z^{2n} - z^{2n-1}| + \ldots + |z^2 - z|$ 1p

$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq \left(|z^{2n-1}| + |z^{2n-3}| + \ldots + |z|\right)|z-1| = n|z-1|$ 2p

Subiectul 4. Fie A un punct al cercului cu centrul □n originea reperului cartezian xOy și de rază 1, astfel □ncât $\mu\left(\widehat{xOA}\right) = \frac{\pi}{6}$.

a) Determinați ecuația binomă de grad minim, având coeficienți reali, pentru care una dintre rădăcini să fie afixul punctului A;

b) Aflați aria poligonului cu vârfurile A_k, unde A_k sunt imaginile geometrice ale ecuației de la punctul a).

Soluție și barem

a) $A(a)$ și $z^n = b,\ a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. $a = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ și $a^n = b$ 1p

$\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} = b \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin\frac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow n = 6k, k \in \mathbb{N}^*$ 2p

$n = 6$, $b = -1$, deci ecuația este $z^6 + 1 = 0$ 1p

b) $A_k(z_k)$, $z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}$, $k = \overline{0,5}$, $A_0A_1 \ldots A_5$ hexagon regulat 1p

$\mathcal{A}[A_0A_1 \ldots A_5] = 6\mathcal{A}[OA_0A_1] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.