Ministerul Educației și Cercetării Științifice
Inspectoratul Școlar Județean Vaslui

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Clasa a IX-a

Problema 1. Demonstrați, că pentru orice număr natural nenul n, are loc inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}+\frac{\sqrt{n+2}}{n+3}+\ldots+\frac{\sqrt{2n+2}}{2n+3}<\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n+4}}.$$

Problema 2. Să se determine numerele iraționale x, cu proprietatea că numerele x^2+x și x^3+2x^2 sunt întregi.

Gazeta Matematică

Problema 3. Se notează cu O_1 și O_2 mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$.

(i) Să se arate că $\overrightarrow{O_1O_2}=\dfrac{\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}}{2}$

(ii) Să se arate că dacă $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=3\cdot\overrightarrow{O_1O_2}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Problema 4. Să se determine numerele reale x, care verifică relația:

$\left|[x-a]\right|+\left[\,|x-a|\,\right]=1$, unde a este un parametru real.

(S-a notat $[t]$ partea întreagă a numărului real t.)

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Soluții și bareme orientative – Clasa a IX-a

Problema 1. Demonstrați, că pentru orice număr natural nenul n, are loc inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}+\frac{\sqrt{n+2}}{n+3}+...+\frac{\sqrt{2n+2}}{2n+3}<\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n+4}}.$$

Soluție. Avem $\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+2)^2}}<\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+2)^2-1}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}=\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ ……………..**(3p)**

Analog se arată că fiecare termen din membrul stâng este mai mic decât termenul corespunzător din membrul drept……………………………………………………….**(2p)**

Adunând aceste inegalități obținem inegalitatea cerută..**(2p)**

Problema 2. Să se determine numerele iraționale x, cu proprietatea că numerele x^2+x și x^3+2x^2 sunt întregi.

Gazeta Matematică

Soluție.

Fie $a=x^2+x$, $a\in Z$ .Avem $x^3+2x^2=x^2(x+2)=(a-x)(x+2) = -x^2+(a-2)x+2a=(a-1)x +a$ (1). …………**(3p)**

Cum x^3+2x^2 , a, a-1 sunt numere întregi, iar x este irațional, obținem $a-1=0\Rightarrow a=1$………...**(2p)**

Înlocuind în relația (1) obținem ecuația : $x^2+x-1=0$ …………………………………………..**(1p)**

Rezolvând ecuația obținem $x\in\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ și ambele convin pentru că sunt numere iraționale și verifică proprietatea dată.………………………………………………………………**(1p)**

Problema 3. Se notează cu O_1 şi O_2 mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$.

(i) Să se arate că $\overrightarrow{O_1O_2} = \dfrac{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}}{2}$

(ii) Să se arate că dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Soluție. **a)** Fie O un punct oarecare în plan . Atunci,

$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{OO_2} - \overrightarrow{OO_1} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2} - \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \dfrac{\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) - \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)}{2} = \dfrac{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}}{2}$ ……………......**(4p)**

b) Relaţia $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$ se scrie $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = 3 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$, adică $2 \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = 3 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$.

Se obţine $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0} \Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow ABCD$ este paralelogram……………………………………**(3p)**

Problema 4. Să se determine numerele reale x, care verifică relația:

$$\left|[x-a]\right| + \left[\,|x-a|\,\right] = 1, \text{ unde } a \text{ este un parametru real.}$$

(S-a notat $[t]$ partea întreagă a numărului real t.)

Soluție.

Notăm $y = x - a$ şi cum $\left|[y]\right| \geq 0 \Rightarrow \left[|y|\right] \in \{0, 1\}$ ………………………………………………**(2p)**

Dacă $\left[|y|\right] = 0 \Rightarrow |y| \in [0, 1) \Rightarrow y \in (-1, 1)$ şi cum, din ecuaţie, $\left|[y]\right| = 1 \Leftrightarrow [y] = \pm 1$, avem soluţia $y \in (-1, 0)$ …………………………………………………………………………………**(2p)**

Dacă $\left[|y|\right] = 1 \Rightarrow |y| \in [1, 2) \Rightarrow y \in (-2, -1] \cup [1, 2)$ şi cum, din ecuaţie $\left|[y]\right| = 0 \Leftrightarrow [y] = 0 \Leftrightarrow y \in [0, 1)$ în acest caz nu există soluţie………………………………...**(2p)**

În concluzie $x \in (a-1, a)$ ……………………………………………………………..**(1p)**