Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2013

Clasa a VIII-a

Problema 1. Să se demonstreze că:

a) $\sqrt{11+6\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}\in\mathbb{N}$.

b) $\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{100\cdot\sqrt{99}+99\cdot\sqrt{100}}<\dfrac{19}{20}$.

c) $\sqrt{x^2-8\cdot x+25}+\sqrt{4\cdot x^2+12\cdot x+25}>7$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Romeo Zamfir, profesor, Galaţi

Problema 2. Se consideră rombul $ABCD$ cu $AB=8\,\text{cm}$ şi $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Pe planul rombului $ABCD$, în punctul A, se ridică perpendiculara MA cu $MA=6\,\text{cm}$.

a) Să se calculeze distanţa dintre punctele M şi D.

b) Să se calculeze distanţa de la A la planul (MBD).

c) Să se calculeze distanţa de la M la dreapta BC.

Romeo Zamfir, profesor, Galaţi

Problema 3. Fie $a,\ b>0$. Să se demonstreze inegalităţile:

a). $(a^3+1)\cdot(b^3+1)\geq(a^2\cdot b+1)\cdot(b^2\cdot a+1)$.

b). $a^3\cdot b^3+1\geq a\cdot b\cdot(a+b)$, pentru $a,b\geq 1$ sau $a,b\leq 1$.

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră dreaptă, cu bazele pătrate, în care $AA'=AB\cdot\sqrt{2}$ şi M, N, O sunt, respectiv, mijloacele segmentelor $[BB']$, $[DD']$, $[BD]$.

a). Să se demonstreze că $A'B\perp(AMD)$.

b). Dacă $\{G\}=A'O\cap(AMN)$, să se demonstreze că punctul G este centrul de greutate atât pentru triunghiul AMN cât şi pentru triunghiul $A'BD$.

c). Să se demonstreze că dreapta de intersecţie a planelor (AMD) şi (ANB) este perpendiculară pe planul $(A'BD)$.

Problemă selectată de
Ioana Lefteriu, profesor, Galaţi
G.M.nr.10, 2012

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie-2013

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	**a)** Prin calcul deducem că $\sqrt{11+6\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2}-\sqrt{2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1+1}=$ $=\sqrt{3^2+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1+1^2}=\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1}$ $=3+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)=4\in\mathbb{N}$. Altfel, se poate folosi formula radicalilor dubli (compuşi): $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ (se aplică numai dacă $a^2-b\geq0$)	**3p**
	b).Notăm $S=\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\cdot\sqrt{99}+99\cdot\sqrt{100}}$. Observăm că termenii sumei sunt de forma $\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{\left[(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}\right]\cdot\left[(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}\right]}=$ $=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{(k+1)^2\cdot k-k^2\cdot(k+1)}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+1-k)}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{k\cdot(k+1)}=$ $=\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Deci, $\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, $S=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=$ ceea ce trebuia demonstrat.	**2p**

	c). $\sqrt{x^2-8\cdot x+25}+\sqrt{4\cdot x^2+12\cdot x+25}=\sqrt{x^2-2\cdot 4\cdot x+4^2+9}+\sqrt{(2\cdot x)^2+2\cdot(2\cdot x)\cdot 3+3^2+16}=$ $=\sqrt{(2\cdot x)^2+2\cdot(2\cdot x)\cdot 3+3^2+16}=$ $\sqrt{(x-4)^2+9}+\sqrt{(2\cdot x+3)^2+16}>\sqrt{0+9}+\sqrt{0+16}=7,(\forall)x\in\mathbb{R}.$ Precizăm că avem inegalitate strictă deoarece expresiile $x-4$ şi $2\cdot x+3$ nu simultan, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	**1p** **1p**
2.	**a)** Din triunghiul MAD $\left(m(\sphericalangle MAD)=90^\circ\right)$ obţinem cu teorema lui Pitagora că $MD=10$ cm.	**1p**
	b) Notăm cu O intersecţia diagonalelor rombului $[AC]$ şi $[BD]$. Deoarece $ABCD$ este romb, deducem că $AC\perp BD$. Deci, $MA\perp(ABCD)$ şi $AC\perp BD$, de unde, folosind teorema celor trei perpendiculare obţinem că $MO\perp BD$. Avem că $AO=\dfrac{AB\cdot\sqrt{3}}{2}=4\cdot\sqrt{3}$ şi din triunghiul ΔMOA $\left(m(\sphericalangle MAO)=90^\circ\right)$ obţinem cu teorema lui Pitagora că $MO=\sqrt{84}$ cm $=2\cdot\sqrt{21}$ cm. Din $MO\perp BD$ şi $AO\perp BD$ obţinem $BD\perp(MAO)$, deci $(MOA)\perp(MBD)$. Ducem $AE\perp MO,\ E\in MO$ şi din relaţiile $(MOA)\cap(MBD)=MO$, $(MOA)\perp(MBD)$, deducem că $AE\perp(MBD)$, de unde obţinem că distanţa de la M la planul (MBD) este egală cu lungimea segmentului $[AE]$. Din triunghiul ΔMOA $\left(m(\sphericalangle MAO)=90^\circ\right)$ deducem că $AE=\dfrac{MA\cdot AO}{MO}=\dfrac{6\cdot 4\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{21}}=\ =\dfrac{12}{\sqrt{7}}=\dfrac{12\cdot\sqrt{7}}{7}.$	**2p** 1p

	c) Ducem $AN \perp BC,\ N \in BC$. Avem că $MA \perp (ABCD)$ şi $AN \perp BC$, de unde obţinem, folosind teorema celor trei perpendiculare, că $MN \perp BC$. Deci, distanţa de la M la BC este egală cu lungimea segmentului $[MN]$. Deoarece triunghiul ΔABD este echilateral deducem că $AM = 4\cdot\sqrt{3}$. Din triunghiul ΔMAN $\left(m(\sphericalangle MAN) = 90^\circ\right)$ obţinem cu teorema lui Pitagora că $MN = 2\cdot\sqrt{21}$ cm .	**1p** **2p**
3.	a). $\left(a^3+1\right)\cdot\left(b^3+1\right) \geq \left(a^2\cdot b+1\right)\cdot\left(b^2\cdot a+1\right) \Leftrightarrow$ $a^3\cdot b^3+a^3+b^3+1 \geq a^3\cdot b^3+a^2\cdot b+b^2\cdot a+1 \Leftrightarrow$ $a^3+b^3 \geq a^2\cdot b+b^2\cdot a \Leftrightarrow$ $(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right) \geq a\cdot b\cdot(a+b) \Leftrightarrow a^2-a\cdot b+b^2 \geq a\cdot b \Leftrightarrow$ $(a-b)^2 \geq 0 (A)$	**1p** 1p 1p
	b). $a^3\cdot b^3+1 \geq a\cdot b\cdot(a+b) \Leftrightarrow a^3\cdot b^3+1 \geq a^2\cdot b+a\cdot b^2 \Leftrightarrow$ $a^3\cdot b^3+1-a^2\cdot b-a\cdot b^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $a^2\cdot b\cdot\left(a\cdot b^2-1\right)-\left(a\cdot b^2-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow$ $\left(a\cdot b^2-1\right)\cdot\left(a^2\cdot b-1\right) \geq 0.$ În cazul $a,b \geq 1 \Rightarrow a^2\cdot b \geq 1,\ a\cdot b^2 \geq 1 \Rightarrow \left(a^2\cdot b-1\right)\cdot\left(a\cdot b^2-1\right) \geq 0 (A).$ În cazul $a,b \leq 1 \Rightarrow a^2\cdot b \leq 1,\ a\cdot b^2 \leq 1 \Rightarrow \left(a^2\cdot b-1\right)\cdot\left(a\cdot b^2-1\right) \geq 0 (A).$	**1p** **1p** **1p** **1p**

<table>
<tr>
<td>4.</td>
<td>
a)
Fie A′B ∩ AM={E}
$MB \parallel AA' \Rightarrow \triangle AA'E \sim \triangle MBE \Rightarrow \frac{MB}{AA'} = \frac{ME}{EA} = \frac{BE}{EA'} = \frac{1}{2}.$
$\triangle ABM\left(m\left(\measuredangle ABM\right) = 90^\circ\right) \Rightarrow AM^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{6}}{2};$
$\triangle AA'B\left(m\left(\measuredangle A'AB\right) = 90^\circ\right) \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$
$\frac{ME}{EA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{3}{2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{6}}{3};$
$\frac{BE}{EA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BE}{BA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow BE = \frac{a\sqrt{3}}{3};$
$AE^2 = \frac{6a^2}{9}$
$BE^2 = \frac{3a^2}{9}$
$\left.\begin{array}{l} AE^2 = \frac{6a^2}{9} \\ BE^2 = \frac{3a^2}{9} \\ AB^2 = a^2 \end{array}\right\} \overset{R.T.P}{\Rightarrow} A'B \perp AM.$
$\left.\begin{array}{l} DA \perp \left(AA'B'B\right) \\ A'B \subset \left(AA'B'B\right) \end{array}\right\} \Rightarrow DA \perp A'B;$
$\left.\begin{array}{l} DA \perp A'B \\ A'B \perp AM \\ DA \cap AM = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow A'B \perp \left(AMD\right).$
</td>
<td>1p

1p</td>
</tr>
</table>

	b) $A'O \subset (A'BD)$; $\left.\begin{array}{l} A'B \cap AM = \{E\} \\ A'D \cap AN = \{F\} \end{array}\right\} \Rightarrow (A'BD) \cap (AMN) = EF$ $\dfrac{A'E}{EB} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{A'F}{FD} \overset{\overbrace{R.T.Th.}}{\Rightarrow} EF \parallel BD \parallel MN$; $\triangle A'BD$: $A'O$ este mediana $A'O \cap EF = \{G\}$; $GE \parallel OB \Rightarrow \dfrac{A'E}{EB} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{A'G}{GO} \Rightarrow$ G este centrul de greutate al triunghiului $\triangle A'BD$.	**2p**
	Fie $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ $OO' \cap MN = \{O''\}$ $AO'' \cap EF = \{G'\}$ $G'E \parallel O''M \overset{\overbrace{TFA}}{\Rightarrow} \dfrac{AE}{AM} = \dfrac{AG'}{AO''} = \dfrac{G'E}{O''M} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ G' este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ANM$. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{G'E}{O''M} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{G'E}{OB} = \dfrac{2}{3} \\ Dar\ \dfrac{GE}{OB} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{G'E}{OB} = \dfrac{GE}{OB} \Rightarrow$ $G'E = GE, G, G' \in [EF] \Rightarrow G = G'$ Aşadar, cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate.	**1p**

	c). $\left.\begin{array}{l}(AA'D'D) \parallel (BB'C'C)\\ (AMD)\cap(BB'C'C)=MT, T\in CC'\\ (AMD)\cap(AA'D'D)=AD\end{array}\right\}\Rightarrow MT \parallel AD;$ $\left.\begin{array}{l}MT \parallel AD\\ [BM]\equiv[MB']\end{array}\right\}\Rightarrow [CT]\equiv[TC'].$ $\left.\begin{array}{l}(AA'B'B) \parallel (DD'C'C)\\ (ANB)\cap(DD'C'C)=NT, T\in CC'\\ (ANB)\cap(AA'B'B)=AB\end{array}\right\}\Rightarrow NT \parallel AB;$ $(AMTD)\cap(ANTB)=AT;$ $\left.\begin{array}{l}A'B\perp(AMTD)\\ AT\subset(AMTD)\end{array}\right\}\Rightarrow AT\perp A'B;$ $\left.\begin{array}{l}DB\perp AC\\ DB\perp TC\\ AC\cap TC=\{C\}\end{array}\right\}\Rightarrow DB\perp(TAC);$ $\left.\begin{array}{l}DB\perp(TAC)\\ TA\subset(TAC)\end{array}\right\}\Rightarrow TA\perp DB;$ $\left.\begin{array}{l}AT\perp A'B\\ TA\perp DB\\ A'B\cap DB=\{B\}\end{array}\right\}\Rightarrow AT\perp(A'BD).$	**1p** 1p