Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA A IX A

Problema 1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $|x^2 - 3x + 2| = \left|\left|x - \frac{1}{3}\right| - \frac{2}{3}\right|$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n^2-n}{3}\right] = n, n \in \mathbb{Z}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Problema 2. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n, a > 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$. Dacă $x_1 = x_{n+1}$, arătaţi că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \geq \frac{a}{2}$$

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu G şi I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}$

b) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c) \cdot \overrightarrow{MI}$, cu notaţiile $a = BC, b = AC, c = AB$.

c) Dacă $\vec{v} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$ şi $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$, să se arate că vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{u}$ sunt coliniari şi $3 \cdot |\vec{v}| = (a+b+c) \cdot |\vec{u}|$

Problema 4. Pe laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P şi respectiv Q.

a) Arătaţi că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ este coliniar cu $\overrightarrow{BD}$.

b) Indicaţi 4 puncte M, N, P, Q pentru care echivalenţa de la punctul a) are loc.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A IX A

Problema 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x^2-3x+2|=\left|\left|x-\frac{1}{3}\right|-\frac{2}{3}\right|$, $x\in\mathbf{R}$;

b) $\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n^2-n}{3}\right]=n,\ n\in\mathbb{Z}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Soluție și barem

a) Prelucrând ecuația se obține:

1. $x^2-3x+\frac{8}{3}-\left|x-\frac{1}{3}\right|=0$ sau 2. $x^2-3x+\frac{4}{3}+\left|x-\frac{1}{3}\right|=0$ 1p

Dacă $x<\frac{1}{3}$ atunci, din 1. rezultă ecuația $3x^2-6x+7=0$ care nu are soluții reale, iar din 2. Rezultă ecuația $3x^2-12x+5=0$ cu soluțiile $x_1=\frac{6+\sqrt{21}}{3}$ și $x_2=\frac{6-\sqrt{21}}{3}$ ambele mai mari decât $\frac{1}{3}$. 1p

Dacă $x>\frac{1}{3}$ atunci, din 1. rezultă ecuația $x^2-4x+3=0$ cu soluțiile $x_1=1$ și $x_2=3$, iar din 2. Rezultă ecuația $x^2-2x+1=0$ cu soluțiile $x_1=x_2=1>\frac{1}{3}$..

Așadar, mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{1,3\}$ 1p

b)

$\left[\frac{n-1}{2}\right]=k\Leftrightarrow k\le\frac{n-1}{2}<k+1\Rightarrow 2k\le n-1<2k+2\Rightarrow 2k+1\le n<2k+3\Rightarrow n\in\{2k+1,2k+2\}$ 1p

Dacă $n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$:

$k+\left[\frac{n^2-n}{3}\right]=2k+1\Leftrightarrow\left[\frac{(2k+1)^2-(2k+1)}{3}\right]=k+1\Leftrightarrow\left[\frac{(2k+1)(2k)}{3}\right]=k+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k+1\le\frac{2k(2k+1)}{3}<k+2\Leftrightarrow 3k+3\le 4k^2+2k<3k+6\,|-(3k+3)$

$0\le 4k^2-k-3<3$, $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4k^2-k-3\in\mathbb{Z}$. Analizăm situațiile:

$4k^2-k-3=0\Rightarrow k_1=\frac{1-7}{8}\notin\mathbb{Z},k_2=\frac{1+7}{8}=1\in\mathbb{Z}$

$4k^2-k-3=1 \Rightarrow 4k^2-k-4=0, \Delta=65 \neq \text{pp}$

$4k^2-k-3=2 \Rightarrow k_1=\frac{1-9}{8}=-1, k_2=\frac{1+9}{8} \notin \mathbb{Z}$

$k \in \{-1,1\} \Rightarrow n \in \{-1,3\}$ 2p

Dacă $n=2k+2, k \in \mathbb{Z}$:

$$k+\left[\frac{n(n-1)}{3}\right]=2k+2 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+2)(2k+1)}{3}\right]=k+2 \Leftrightarrow k+2 \leq \frac{4k^2+6k+2}{3} < k+3 \Leftrightarrow$$

$3k+6 \leq 4k^2+6k+2 < 3k+9 \,|-3k-6 \Leftrightarrow 0 \leq 4k^2+3k-4 < 3$. Analizăm situațiile:

$4k^2+3k-4=0 \Rightarrow \Delta=73 \neq pp$

$4k^2+3k-4=1 \Rightarrow \Delta=89 \neq pp$

$4k^2+3k-4=2 \Rightarrow \Delta=105 \neq pp$. Nu avem soluții în acest caz. 1p

Problema 2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, a > 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$. Dacă $x_1 = x_{n+1}$, arătați că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \geq \frac{a}{2}$$

Soluție și barem

Avem

$\frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{2} \geq x_i x_{i+1} \Leftrightarrow \frac{x_i x_{i+1}}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \leq \frac{1}{2}$ .... 2p.

$\Rightarrow \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} = x_i - x_{i+1}\frac{x_i x_{i+1}}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \geq x_i - \frac{x_{i+1}}{2}$ 2p

Adunând relațiile pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ obținem

$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2} = \frac{a}{2}$ .... 3p.

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\cdot\overrightarrow{MG}$

b) $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\cdot\overrightarrow{MI}$, cu notațiile $a=BC, b=AC, c=AB$.

c) Dacă $\vec{v}=a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}$ şi $\vec{u}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$, să se arate că vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{u}$ sunt coliniari şi

$3\cdot|\vec{v}|=(a+b+c)\cdot|\vec{u}|$

Soluție și barem

a) Fie D mijlocul lui (BC) $\Rightarrow \overrightarrow{MD}=\dfrac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{2}$. Dacă G este centrul de greutate $\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GD}}=-2\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{MG}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{MA}+\dfrac{2}{1+2}\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.................................2p

b) Fie $[AE$ şi $[BF$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$, $E\in(BC), F\in(AC)$.

Din teorema bisectoarei $\Rightarrow \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{BA}{AC}=\dfrac{c}{b}$ şi $\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}}=-\dfrac{c}{b}$;

$I\in(AE)$, $(BI$ bisectoarea unghiului $\widehat{B}$ $\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IE}}=-\dfrac{c(b+c)}{ac}=-\dfrac{b+c}{a}$

$$\overrightarrow{ME}=\frac{1}{1+\frac{c}{b}}\overrightarrow{MB}+\frac{\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}\overrightarrow{MC}=\frac{b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}}{b+c}$$

$$\overrightarrow{MI}=\frac{1}{1+\frac{b+c}{a}}\overrightarrow{MA}+\frac{\frac{b+c}{a}}{1+\frac{b+c}{a}}\overrightarrow{ME}=\frac{a\overrightarrow{MA}}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}}{b+c}=\frac{a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}}{a+b+c}$$ 2p

c) Dacă în b) considerăm $M=G$ atunci $\vec{v}=a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=(a+b+c)\cdot\overrightarrow{GI}$

Dacă în a) considerăm $M=$ I atunci $\vec{u}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\cdot\overrightarrow{IG}$.

Observăm că $\overrightarrow{GI}=-\dfrac{1}{3}\vec{u}\Rightarrow\vec{v}=(a+b+c)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\vec{u}\right)=-\dfrac{a+b+c}{3}\vec{u}$ $\Rightarrow$ vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{u}$ sunt coliniari.

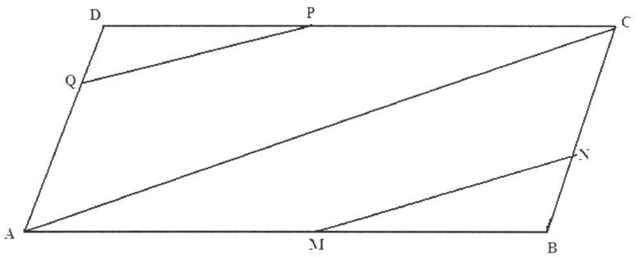
$|\vec{v}|=\left|\dfrac{a+b+c}{3}\right|\cdot|\vec{u}|\Leftrightarrow 3|\vec{v}|=(a+b+c)\cdot|\vec{u}|$...3p

Problema 4. Pe laturile $[AB],[BC],[CD],[DA]$ ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P şi respectiv Q.

a) Arătați că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}$ este coliniar cu $\overrightarrow{BD}$.

b) Indicați 4 puncte M, N, P, Q pentru care echivalența de la punctul a) are loc.

Soluţie şi barem



$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{BC}=\vec{v},\ \frac{AM}{AB}=a,\ \frac{BN}{BC}=b,\ \frac{CP}{CD}=c,\ \frac{DQ}{DA}=d$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)+\overrightarrow{BN}=\left(\vec{u}-a\cdot\vec{u}\right)+b\cdot\vec{v}=(1-a)\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$$

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DP}=+d\vec{v}+\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{PC}\right)=+d\vec{v}+\left(\vec{u}-\vec{u}c\right)=(1-c)\cdot\vec{u}+d\cdot\vec{v}$$

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\vec{u}(2-a-c)+\vec{v}(b+d)$ 2p

$\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$ 1p

$\dfrac{2-a-c}{1}=\dfrac{b+d}{1}\Rightarrow 2=a+b+c+d$ 1p

Analog, $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}$ coliniar cu $\overrightarrow{BD}$ $\Leftrightarrow 2=a+b+c+d$

a) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}$ coliniar cu $\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow a+b+c+d=2\Leftrightarrow \overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}$ coliniar cu $\overrightarrow{BD}$...................... ....2p

b) Putem considera mijloacele laturilor $[AB],[BC],[CD],[DA]$. 1p

Notă: Orice altă soluţie corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.