OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -

CLASA A XII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^*$ considerăm mulţimea $U_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$.

a) Să se arate că există $\omega \in U_p$ astfel încât $U_p = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p-1}\}$.

b) Să se arate că, dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimea $U_m \cup U_n$ este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor complexe, atunci *m* divide *n* sau *n* divide *m*.

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi un subgrup *H* al lui *G*, cu $H \neq G$.

a) Să se arate că dacă $x \in H$ şi $y \in G \setminus H$, atunci $xy \in G \setminus H$.

b) Să se arate că dacă orice două elemente din $G \setminus H$ comută, atunci grupul $(G, \cdot)$ este comutativ.

3. Fie $0 < a < b$ şi $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ o funcţie continuă.

a) Să se arate că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ există şi este unic numărul $x_n \in (a, b)$ astfel încât

$$n \int_a^{x_n} f(x)dx = \int_{x_n}^{b} f(x)dx.$$

b) Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este şirul definit la a), să se calculeze $\lim_{n \to \infty} x_n$.

4. a) Să se arate că $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3}$, pentru orice $x \geq 0$.

b) Fie $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ o funcţie continuă. Să se arate că

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Problema 3 a fost selectată din nr. 4/2013 al ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicaţie lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiinţe Matematice din România

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -

CLASA A XII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor***

Pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^*$ considerăm mulţimea $U_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$.

a) Să se arate că există $\omega \in U_p$ astfel încât $U_p = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}\}$.

b) Să se arate că, dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimea $U_m \cup U_n$ este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor complexe, atunci *m* divide *n* sau *n* divide *m*.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $U_p = \left\{\cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p} \mid k = 0,1,2,\dots,p-1\right\}$	**1p**
Cerinţa se realizează, de exemplu, pentru $\omega_p = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$	**2p**
b) Dacă $U_m \cup U_n$ este parte stabilă, atunci $U_m \cup U_n$ conţine elementul $\omega_m\omega_n$	**1p**
În acest caz avem, de exemplu, $\omega_m\omega_n \in U_m$, deci $\omega_m\omega_n = \omega_m^s, s \in \{1, 2, \dots, m\}$	**1p**
Rezultă $\omega_n = \omega_m^{s-1}$, de unde $2\pi/n = 2(s-1)\pi/m$, adică $m = (s-1)n$, deci $n \mid m$	**2p**

Enunţ subiect 2, autor***

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi un subgrup *H* al lui *G*, cu $H \neq G$.

a) Să se arate că dacă $x \in H$ şi $y \in G \setminus H$, atunci $xy \in G \setminus H$.

b) Să se arate că dacă orice două elemente din $G \setminus H$ comută, atunci grupul $(G, \cdot)$ este comutativ.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $xy = z \in H$ atunci, deoarece $x^{-1} \in H$ şi H este parte stabilă, $y = x^{-1}z \in H$ – contradicţie, deci $xy \notin H$	**2p**
b) Dacă $x \in H$ şi $y \in G \setminus H$, atunci $y(xy) = (xy)y$ şi, prin simplificare cu y, $xy = yx$	**2p**
Dacă $x \in H$ şi $y \in H$, atunci luăm $z \in G \setminus H$ şi obţinem $(xz)(yz) = (yz)(xz)$, deci $xyz^2 = yxz^2$, de unde $xy = yx$	**3p**

Enunţ subiect 3, autor *Florin Rotaru*

Fie $0 < a < b$ şi $f:[a,b] \to (0,+\infty)$ o funcţie continuă.

a) Să se arate că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ există şi este unic numărul $x_n \in (a,b)$ astfel încât

$$n\int_a^{x_n} f(x)dx = \int_{x_n}^b f(x)dx.$$

b) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este şirul definit la a), să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă F este o primitivă a lui f, atunci cerinţa este $(n+1)F(x_n) = F(b) + nF(a)$	**2p**
Funcţia F este continuă şi strict crescătoare, iar $(n+1)F(a) < F(b) + nF(a) < (n+1)F(b)$, deci există şi este unic $x_n \in (a,b)$ astfel încât $(n+1)F(x_n) = F(b) + nF(a)$.	**2p**
b) $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(b)}{n+1} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nF(a)}{n+1} = F(a)$	**1p**
Deoarece F este strict crescătoare, relaţia precedentă implică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.	**2p**

Enunţ subiect 4, autor ***

a) Să se arate că $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3}$, pentru orice $x \geq 0$.

b) Fie $f:\mathbb{R} \to [0,\infty)$ o funcţie continuă. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)dx$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Considerăm funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3}$. Atunci $f'(x) = \cos x - 1 + x^2/2$, $f''(x) = x - \sin x \geq 0$ pentru $x \geq 0$, f' este crescătoare şi $f'(0) = 0$, deci $f'(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$, de unde f este crescătoare pe $[0,\infty)$, iar $f(0) = 0$ conduce la concluzie	**2p**
b) Din $\sin x \leq x$ pentru $x \geq 0$ obţinem $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = t_n$	**1p**
Cum f este integrabilă, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \int_0^1 f(x)dx$	**1p**
Din a), $s_n \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3} f^3\left(\frac{k}{n}\right) = t_n - \frac{1}{3n^2} u_n$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 f^3(x)dx$	**2p**
Din criteriul cleştelui rezultă concluzia	**1p**