

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



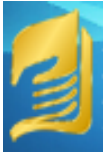
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX-A

- O mulțime nevidă $A \subset \mathbb{N}^*$ se va numi "perfectă" dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului ei de elemente.
 - Verificați că mulțimea $M = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ este perfectă.
 - Determinați toate mulțimile perfecte cu trei elemente.
 - Demonstrați că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ există cel puțin o mulțime perfectă cu n elemente.
- Un număr de 51 insecte minuscule sunt așezate în interiorul unei plăci pătrate de latură 1.
 - Demonstrați că o placă pătrată de latură $\frac{1}{5}$ poate fi acoperită cu un disc de rază $\frac{1}{7}$.
 - Demonstrați că există cel puțin 3 insecte ce pot fi acoperite cu un disc de rază $\frac{1}{7}$.
- Considerăm un triunghi ABC și punctele M, N, P pe laturile (AB) , (BC) , respectiv (CA) astfel încât $AM = BN = CP$. Notăm cu T centrul de greutate al triunghiului MNP .
 - Demonstrați că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AM \cdot \overrightarrow{AB}$.
 - Demonstrați că $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{PT} = \vec{0}$.
 - Dacă, în plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CT} = \vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.
- Considerăm că fiecare punct din plan este colorat cu exact una din culorile *roșu*, *verde*, *galben* sau *albastru* și cel puțin patru puncte sunt de culori diferite.
 - Demonstrați că există cel puțin trei puncte necoliniare și colorate diferit.
 - Demonstrați că există cel puțin trei puncte distincte coliniare și colorate diferit.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



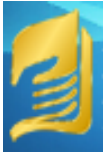
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X-A

1. Fie funcția $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$
 - a) Demonstrați că $f(2) + f(-2)$ este număr real.
 - b) Demonstrați că $|f(z)| = 1$ dacă și numai dacă $z \in \mathbb{R}$.
 - c) Dacă $z_0 = 1+i$ și pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ avem $z_n = f(z_{n-1})$, aflați z_{2013} .
2. Doi angajați au inițial același salariu. Datorită crizei, primului angajat i se reduce salariul cu 25%, după care firma angajatoare revine și îi aplică mărire salarială tot cu 25%. Din motive asemănătoare și celui de al doilea angajat i se aplică inițial o reducere salarială de 25% iar apoi o majorare de 10% urmată de o nouă majorare de 15%. Care dintre cei doi salariați va avea la final un salariu mai mare?
3. Fie $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(0) = 1$ și $f(x+y) = f(\lg(xy))$, ($\forall x > 0$ și $y > 0$). Demonstrați că:
 - a) pentru orice $t \geq 2$ există $x > 0$ astfel încât $t = x + \frac{1}{x}$;
 - b) $f(t) = 1$, pentru orice $t \geq 2$;
 - c) $f(10^t + 1) = f(t)$, pentru orice $t \geq 0$;
 - d) Determinați funcția f .
4. Un zid în formă de dreptunghi cu înălțimea de 2 metri se acoperă cu plăci dreptunghiulare având fiecare lungimea de 2 metri și lățimea de 1 metru. Notăm cu a_n numărul de moduri în care putem așeza plăcile când zidul are lungimea de n metri, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Demonstrați că $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ și $a_4 = 5$.
 - b) Demonstrați că $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 3$.
 - c) Aflați în câte moduri putem plasa zidul dacă acesta are lungimea de 10 metri.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI A

1. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ încât $A^2 = a \cdot A + b \cdot I_3$

b) Demonstrați că $(I_3 + A) \left(I_3 - \frac{1}{4} \cdot A \right) = I_3$

c) Demonstrați că matricea $B = I_3 + A$ este inversabilă și calculați B^{-1} .

2. Doi prieteni, Andrei și Vasile, măsoară fiecare distanța de acasă până la școală. Distanța măsurată de Andrei este egală cu x km iar cea măsurată de Vasile este egală cu y km. Știind că există $a, b, c \in \{1; 2; 3\}$, nu neapărat distincte dar astfel încât se verifică sistemul

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ ax + y = 5 \\ cx + 3y = b + 6 \end{cases}$$

determinați a, b, c și distanțele x și y .

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

a) Demonstrați că pentru un $a \in \mathbb{R}$ arbitrar ales, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(ax) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a < 0 \\ 1, & \text{dacă } a = 0 \\ \infty, & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(ax)$, $a \in \mathbb{R}$.

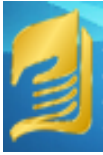
c) Determinați numerele $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ încât pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$ să aibă loc $f(ax) = a \cdot f(x) + b$.

4. O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe aflată în studiu se modifică în timp după legea $T(t) = \sqrt{t^2 + a \cdot t + b} - c \cdot t + 5$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt constante ce trebuie determinate și în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t \geq 0$ ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că $T(1) = 7$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 8$.

b) Cu a, b, c astfel determinați, stabiliți dacă e posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie 0^0 .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + e}$. Se cere:
 - a) Demonstrați că $f(x) + f(1-x) = 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - b) Determinați primitiva F a funcției f care verifică $F(0) = 0$.
 - c) Calculați $\int_0^1 f(x) \cdot \sin(\pi x) dx$
2. Pe $G = (0; +\infty)$ se consideră legea de compoziție notată "*" și care verifică următoarele două condiții:
 - (i) $(x+1)*x = 1$, $(\forall) x \in G$
 - (ii) $(x \cdot y)*z = x \cdot (y*z)$, $(\forall) x, y, z \in G$Se cere:
 - a) Demonstrați că $x*y = \frac{x}{y+1}$, $(\forall) x, y \in G$
 - b) Studiați dacă $(G; *)$ este structură asociativă;
 - c) Studiați dacă $(G; *)$ admite element neutru.
3. Un mobil se deplasează pe o traiectorie după legea de mișcare $s: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu $s(0) = 0$, în care $s(t)$ reprezintă spațiul parcurs de la momentul inițial $t_0 = 0$ până la momentul $t \geq 0$. Știind că accelerația sa la momentul $t \geq 0$ este $a(t) = t \cdot e^t$ și viteza inițială este $v(0) = a > 0$, aflați legea de mișcare.
Notă: Este cunoscut că cele trei elemente principale ale unei mișcări, respectiv funcțiile ce descriu spațiul parcurs $s(t)$, viteza momentană $v(t)$ și accelerația momentană $a(t)$, verifică $s'(t) = v(t)$ și $v'(t) = a(t)$.
4. Andrei, despre care nicicum nu se poate spune că i-ar fi dragi calculele, s-a hotărât să simplifice toată matematica prin introducerea următoarelor reguli de "adunare" și "înmulțire": *rezultatul oricărei adunări sau înmulțiri a două numere naturale este, după el, egal cu ultima cifră a rezultatului care s-ar obține după regulile obișnuite*. Astfel, notând prin " \oplus " și " \odot " adunarea și înmulțirea după regulile lui Andrei, vom avea, de pildă, $15 \oplus 28 = 3$ și $26 \odot 39 = 4$. Se cere:
 - a) Calculați, după regula lui Andrei, $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \dots \oplus 10$ și $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \dots \oplus 20$.
 - b) Demonstrați că $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \dots \oplus 2013 = 1$.
 - c) Considerând $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$, demonstrați că $(A; \oplus; \odot)$ este inel comutativ.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.