Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a V-a

Subiectul 1

Aflați numerele de forma $\overline{abc}$ care împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul 4 și restul $\overline{bc}-8$. (7p)

Subiectul 2

1. Arătați că numărul $A=6^{2015}$ se poate scrie ca diferență de două pătrate perfecte. (4p)
2. Demonstrați că numărul $B=2015+2+6+10+...+4026$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte. (3p)

Subiectul 3

Se consideră numerele $a=8^{222}-3\cdot4^{332}-2^{663}$ și $b=3^{500}-2\cdot3^{499}-2\cdot3^{498}-...-2\cdot3^{443}-2\cdot3^{442}$

a) Să se compare numerele a și b. (4p)

b) Să se determine cel mai mic număr p *prim* de două cifre astfel încât $a+b+p$ să se dividă cu 10. (3p)

Subiectul 4

Considerăm tabelul format din perechile de numere naturale (7p)

(1,1)
(1,2) (2,1)
(1,3) (2,2) (3,1)
(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)
....

a) Care este perechea din mijlocul rândului al 9-lea?

b) Care este a 1000-a pereche de pe rândul 2010?

c) În câte perechi scrise de la rândul 1 până la rândul 2010 inclusiv, apare numărul 1005?

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a V-a

BAREM

Subiectul 1 Aflați numerele de forma $\overline{abc}$ care împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul 4 și restul $\overline{bc}-8$

Soluție și barem

Scrie $\overline{abc}=4\cdot\overline{bc}+\overline{bc}-8$	1 p
$\overline{bc}=25\cdot a+2$	1 p
$25a+2<100 \Rightarrow a<4$	1 p
$a=1 \Rightarrow \overline{bc}=27$	1 p
$a=2 \Rightarrow \overline{bc}=52$	1 p
$a=3 \Rightarrow \overline{bc}=77$	1 p
$\overline{abc}\in\{127,252,377\}$	1 p

Subiectul 2 1. Arătați că numărul $A=6^{2015}$ se poate scrie ca diferență de două pătrate perfecte.

2. Demonstrați că numărul $B=2015+2+6+10+...+4026$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

Soluție și barem

1. $A=6^{2012}\cdot 6^3$	1 p
$A=6^{2012}\cdot(225-9)$	2 p
$A=(15\cdot 6^{1006})^2-(3\cdot 6^{1006})^2$	1 p
2. $B=2015+2\cdot(1+3+5+\cdots+2013)$	1 p
$B=(1+3+5+\cdots+2013)+(1+3+5+\cdots+2013+2015)$	1 p
$B=1007^2+1008^2$	1 p

Subiectul 3 Se consideră numerele $a=8^{222}-3\cdot 4^{332}-2^{663}$ și $b=3^{500}-2\cdot 3^{499}-2\cdot 3^{498}-...-2\cdot 3^{443}-2\cdot 3^{442}$

a) Să se compare numerele a și b.

b) Să se determine cel mai mic număr *p prim* de două cifre astfel încât $a+b+p$ să se dividă cu 10.

Soluție și barem

a) $a = 2^{633}$	1 p
$b = 3^{500} - (3-1)\cdot 3^{499} - (3-1)\cdot 3^{498} - \cdots - (3-1)\cdot 3^{442}$	1 p
$b = 3^{442}$	1 p
$a < b$	1 p
b) $UC(2^{663}) = 8$; $UC(3^{442}) = 9$	1 p
$UC(a+b+p) = 0 \Rightarrow U(p) = 3$	1 p
$p = 13$	1 p

Subiectul 4 Considerăm tabelul format din perechile de numere naturale

(1,1)
(1,2) (2,1)
(1,3) (2,2) (3,1)
(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)

....

a) Care este perechea din mijlocul rândului al 9-lea?

b) Care este a 1000-a pereche de pe rândul 2010?

c) În câte perechi scrise de la rândul 1 până la rândul 2010 inclusiv, apare numărul 1005?

Soluție și barem

a) Scrie al 9-lea rând:

(1,9); (2,8); (3,7); (4,6); (5,5); (6,4); (7,3); (8,2); (9,1) — 1 p

Perechea este (5,5)

b) Scrie rândul 2010

(1,2010), (2,2009), (3,2008), (4,2007), (5,2006), … , (1000,1011), … , (2010,1) — 1 p

Perechea cerută este (1000,1011) — 1 p

c) Rândul 1005

(1,1005), (2,1004), (3,1003), … , (1005,1), (1004,2) … $\Rightarrow$ 2 perechi

Rândul 1006

(1,1006), (2,1005), (3,1004), … , (1005,2), (1006,1) … $\Rightarrow$ 2 perechi

Rândul 1007

(1,1007), (2,1006), (3,1005), … , (1005,3), (1006,2), (1007,1) $\Rightarrow$ 2 perechi

1 p

....

Rândul 2009

$(1,2009),(2,2008),(3,2007),\ldots,(1005,1005),(1006,1004),\ldots,(2009,1) \Rightarrow 1$ pereche 1p

Rândul 2010

$(1,2010),(2,2009),(3,2008),\ldots,(1005,1006),(1006,1005),(1007,1004),\ldots,(2010,1)$
$\Rightarrow 2$ perechi 1p

Numărul 1005 apare în:

$(2010-1004):2-1=1006\cdot 2-1=2012-1=2011$ *perechi* 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.