OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A V-A

1. Un număr natural alcătuit din cel puțin două cifre se numește *interesant* dacă este divizibil cu fiecare cifră a sa și cu fiecare număr obținut din suma oricăror două cifre ale sale.

a) Determinați cel mai mic număr *interesant*.

b) Arătați că există o infinitate de numere *interesante*.

Marius Damian, Brăila

2. a) Calculați: $\left(8^2+1^2\right)\cdot 4^2$.

b) Arătați că numărul $N=1040^{2015}$ poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.

Ștefan Ciochină, Brăila

3. Se dă numărul $P_n=2^n$. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, unul din numerele $P_n\left(P_n^{\ 2}-1\right)$ și $P_n\left(P_n^{\ 2}+1\right)$ este divizibil cu 10.

Ciprian Dobraniș, Brăila

4. Să se determine numerele naturale $x, y, z,$ știind că $4^x+2\cdot\left(3^{2y}\cdot 5^y-\overline{zz}\right)=4029.$

Mihaela Baltă, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A V-A - Soluții

1. Un număr natural alcătuit din cel puțin două cifre se numește *interesant* dacă este divizibil cu fiecare cifră a sa și cu fiecare număr obținut din suma oricăror două cifre ale sale.

a) Determinați cel mai mic număr *interesant*.

b) Arătați că există o infinitate de numere *interesante*.

Marius Damian, Brăila

Soluție. a) Numărul 10 nu este *interesant*, deoarece nu este divizibil cu 0, numărul 11 nu este *interesant*, deoarece nu este divizibil cu 2. Cel mai mic număr *interesant* este 12, deoarece $12 \vdots 1$, $12 \vdots 2$ și $12 \vdots 3$.

b) Considerăm șirul de numere naturale

$$12,\ 11112,\ 11111112,\ ...,\ \underbrace{111...111}_{(3n+1)\text{ cifre}}2,\ ...$$

Fiecare termen al șirului este număr *interesant*, deoarece este divizibil cu 1, cu 2 și cu 3. Fiind o infinitate de termeni, problema este rezolvată.

2. a) Calculați: $\left(8^2+1^2\right)\cdot 4^2$.

b) Arătați că numărul $N=1040^{2015}$ poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.

Ștefan Ciochină, Brăila

Soluție. a) $\left(8^2+1^2\right)\cdot 4^2=\left(64+1\right)\cdot 16=65\cdot 16=1040$

b) $N=1040^{2015}=1040^{2014}\cdot 1040=1040^{2014}\cdot\left(8^2+1^2\right)\cdot 4^2$

$\Rightarrow N=\left(1040^{1007}\cdot 8\cdot 4\right)^2+\left(1040^{1007}\cdot 4\right)^2$

3. Se dă numărul $P_n=2^n$. Să se demonstreze că pentru orice număr natural *n*, unul din numerele $P_n\left(P_n{}^2-1\right)$ și $P_n\left(P_n{}^2+1\right)$ este divizibil cu 10.

Ciprian Dobraniș, Brăila

Soluție. $P_n(P_n{}^2 - 1) = 2^n$ (2^{2n} -1)= 8^n - 2^n , $P_n(P_n{}^2 + 1) = 2^n$ (2^{2n} +1)= $8^n + 2^n$
U(8^n) $\in \{8, 4, 2, 6\}$, U(2^n) $\in \{2, 4, 8, 6\}$, U(8^n - 2^n)=0 pt n=4k, n=4k+2 U($8^n + 2^n$)=0 pt n=4k+1, n=4k+3

4. Să se determine numerele naturale $x, y, z,$ știind că $4^x + 2\cdot\left(3^{2y}\cdot 5^y - \overline{zz}\right) = 4029.$

Mihaela Baltă, Brăila

Soluție. Deoarece $2\cdot\left(3^{2y}\cdot 5^y - \overline{zz}\right)$ este număr par, iar 4029 este număr impar se impune ca 4^x să fie număr impar rezultând $x = 0$. Înlocuind se obține: $2\cdot\left(3^{2y}\cdot 5^y - \overline{zz}\right) = 4028$, de unde rezultă $3^{2y}\cdot 5^y - \overline{zz} = 2014$. Dar $U\left(3^{2y}\cdot 5^y\right) = U\left(9^y\cdot 5^y\right) = U\left(45^y\right) = 5$ pentru $y \neq 0$, de unde rezultă $z = 1$. Obținem $45^y = 2025$, adică $y = 2$.