OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14. 02. 2015

Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se determine funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f\left(\frac{x}{2015}\right) \le \log_{2015} x \le f(x) - 1, \quad \forall\, x \in (0, +\infty).$$

PROBLEMA 2. a) Există numere iraţionale a şi b pentru care a^b este număr natural?

b) Un elev scrie pe tablă numerele $729,\ 15625,\ 343,\ 1331$. La pasul 1 şterge cele patru numere şi în locul fiecăruia scrie media geometrică a celorlalte trei numere. La pasul 2 aplică pasul 1 pentru numerele astfel obţinute. Continuă în acelaşi mod scrierea numerelor.

i) Ce numere a obţinut după primul pas?

ii) Este posibil ca după un număr finit de paşi să scrie pe tablă numerele $847,\ 567,\ 297,\ 8019$?

PROBLEMA 3. Fie numerele $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $z^2 - z + 5 = 0$. Să se arate că

$$(z-1)^a - (z+4)^b = 0$$

dacă şi numai dacă există un număr $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = 4n$ şi $b = 2n$.

PROBLEMA 4. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$ şi $|a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2 = 4$, atunci triunghiul ABC ale cărui vârfuri sunt punctele de afixe a, b şi c este dreptunghic.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1.

(2p) Înlocuim în relaţia dată pe x, cu $2015 \cdot x$

(2p) şi obţinem $f(x) \leq 1 + \log_{2015} x$

(2p) Dar $f(x) \geq 1 + \log_{2015} x$

(1p) Aşadar, $f(x) = 1 + \log_{2015} x$

PROBLEMA 2.

(2p) a) De exemmplu, fie $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $b = \log_{\sqrt{2}} 3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(1p) Se verifică $a^b = 3 \in \mathbb{N}$

(1p) b) După pasul 1 se obţin numerele $1925,\ 693,\ 2475,\ 1575$.

(2p) Dacă după pasul k, pe tablă sunt scrise numerele a, b, c şi d, atunci la pasul $k+1$ numerele devin $\sqrt[3]{bcd}$, $\sqrt[3]{acd}$, $\sqrt[3]{abd}$, $\sqrt[3]{abc}$. Se observă că $\sqrt[3]{bcd} \cdot \sqrt[3]{acd} \cdot \sqrt[3]{abd} \cdot \sqrt[3]{abc} = abcd$, adică după fiecare pas, produsul numerelor de pe tablă este acelaşi.

(1p) Produsul numerelor iniţiale se termină în 5, iar produsul numerelor $847,\ 567,\ 297$ şi 8019 se termină în 7. În concluzie, nu este posibil ca după un număr finit de paşi, să fie scrise pe tablă aceste numere.

PROBLEMA 3.

(1p) Din $z^2 - z + 5 = 0$ avem $(z-1)^2 = -(z+4)$

(3p) Dacă există un număr $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = 4n$ şi $b = 2n$, atunci

$$(z-1)^2 = -(z+4) \Rightarrow \left((z-1)^2\right)^{2n} = \left(-(z+4)\right)^{2n} \Rightarrow (z-1)^a - (z+4)^b = 0$$

(3p) Dacă $(z-1)^a = (z+4)^b$, atunci

$$(z-1)^2 = -(z+4) \Rightarrow (z-1)^{2b} = (-1)^b \cdot (z+4)^b \Rightarrow (z-1)^{2b} = (-1)^b \cdot (z-1)^a$$

de unde, $a = 4n$ şi $b = 2n$ pentru un număr $n \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 4.

(1p) Avem $|a+b|^2 = (a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = 2 + a\overline{b} + \overline{a}b$

(1p) şi $AB^2 = |b-a|^2 = (b-a)\left(\overline{b}-\overline{a}\right) = 2 - \left(a\overline{b} + \overline{a}b\right)$

(1p) de unde, $|a+b|^2 = 4 - AB^2$

Analog, $|b+c|^2 = 4 - BC^2$ şi $|c+a|^2 = 4 - AC^2$

(1p) Relaţia dată devine: $4 - AB^2 + 4 - BC^2 + 4 - AC^2 = 4 \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + AC^2 = 8$

(1p) Din teorema sinusurilor rezultă că $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

(2p) sau echivalent, $1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0 \Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$,

adică triunghiul ΔABC este dreptunghic.

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.