Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală a judeţului Alba, 19 februarie 2016

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VI-a

Problema 1. Calculați suma elementelor mulțimii: A = $\left\{\frac{a}{2}+\frac{b}{3} \mid a,b \in \mathbb{N}; 1 \le a \le 50 \text{ și } 1 \le b \le 50\right\}$.

Soluție:

$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=\frac{3a+2b}{6}$ 1p

$3 \le 3a \le 150$ și $2 \le 2b \le 100 \Longrightarrow 5 \le 3a+2b \le 250$ 1p

dacă a = 2k $\Longrightarrow$ 3a+2b = nr. par, $8 \le 3a+2b \le 250$ (1) 1p

dacă a = 2k+1 $\Longrightarrow$ 3a+2b = nr. impar, $5 \le 3a+2b \le 247$ (2) 1p

din (1) + (2) $\Longrightarrow 5 \le 3a+2b \le 250$, cu excepția numerelor 6 și 249 .... 1p

S(3a+2b) = 5+7+8+9+ ... +248+250 = 6+7+8+ ... 248+249 = 31110 .... 1p

S(A) = $\frac{31110}{6} = 5185$ 1p

Problema 2. Resturile împărțirilor unui număr natural n la 3, 4 și 5 sunt 1, 2, respectiv 3.

a). Aflați resturile posibile ale împărțirii lui n la 120.

b). Calculați suma primelor 20 de numere cu proprietatea din enunț.

Soluție:

a) $n = 3\cdot c_1+1 = 4\cdot c_2+2 = 5\cdot c_3+3$ 1p

$n+2 = 3(c_1+1) = 4(c_2+1) = 5(c_3+1)$ 1p

$n+2 \in \mathcal{M}_{3,4,5} \Longrightarrow n+2 = 60k$, $n = 60k-2$, $n \in \mathbb{N}^*$ 1p

pentru k = 2p+1, p$\in \mathbb{N} \Longrightarrow$ r = 58 .... 1p

pentru k = 2p, p$\in \mathbb{N} \Longrightarrow$ r =118 .... 1p

b) $S = 60\cdot 1-2+60\cdot 2-2+\ldots+60\cdot 20-2 = 12560$ 2p

Problema 3. Punctele C, D și E sunt situate în interiorul segmentului $[AB]$ astfel încât $|AC| = \frac{|BC|}{3}$, $|AD| = \frac{|AB|}{3}$ și $|AE| = \frac{|AC|}{2}$.

a). Dacă M este mijlocul segmentului $[BD]$ arătați că D este mijlocul segmentului $[AM]$.

b). Știind că $|DE| = 40$cm calculați lungimea segmentului $[AB]$.

Soluție:

a) $|AB| = 3\cdot|AD|$, $|BD| = |AB|-|AD| = 2\cdot|AD| \Longrightarrow |AD| = \frac{|BD|}{2}$ 1p

M – mijlocul $[BD] \Longrightarrow |BM| = |MD| = \frac{|BD|}{2} \Longrightarrow |AD| = |MD| = \frac{|BD|}{2} \Longrightarrow$ D – mijlocul $[AM]$ 1p

b) notăm $|AE| = a$, $|AE| = \frac{|AC|}{2} \Longrightarrow |AC| = 2a$

$|AC| = \frac{|BC|}{3} \Longrightarrow |BC| = 3\cdot 2a = 6a$ 1p

$|AB| = |AC|+|BC| = 2a+6a = 8a \Longrightarrow |AD| = \frac{|AB|}{3} = \frac{8a}{3}$ 1p

$|DE| = |AD|-|AE| = \frac{8a}{3}-a = \frac{5a}{3}$ 1p

$|DE| = 40cm \Longrightarrow \frac{5a}{3} = 40cm \Longrightarrow a = 24cm \Longrightarrow AB = 192cm$ 1p

<u>Problema 4</u>. Fie $\sphericalangle XOY$ un unghi ascuțit și [*OZ* bisectoarea acestuia. În semiplanele opuse față de dreapta ce conține semidreapta [*OZ* considerăm punctele *A* și *B* , *B* fiind în același semiplan cu *X* , astfel încât $\sphericalangle BOX \equiv \sphericalangle AOY$ și $\sphericalangle AOB$ este alungit.

a). Dacă $m(\sphericalangle YOZ) = \frac{m(\sphericalangle BOX)}{8}$, aflați $m(\sphericalangle XOY)$.

b). Fie punctele *T* ∈[*OZ* , *L*∈[*OX* Și *R*∈[*OY* astfel încât [*OL*] ≡ [*OR*]. Arătați că Δ*TLR* este isoscel.

c). Dacă *TL* ∩ *AB* = {*E*} și *TR* ∩ *AB* = {*C*}, arătați că Δ*TEC* este isoscel.

Soluție:

a) [*OZ* – bisectoarea $\sphericalangle XOY \Longrightarrow m(\sphericalangle XOZ) = m(\sphericalangle YOZ) = \frac{m(\sphericalangle XOY)}{2}$ 1p

$\sphericalangle AOB$ este alungit $\Longrightarrow m(\sphericalangle AOB) = 180°$

$m(\sphericalangle YOZ) = \frac{m(\sphericalangle BOX)}{8} \Longrightarrow m(\sphericalangle BOX) = 8 \cdot m(\sphericalangle YOZ)$

$m(\sphericalangle BOX) + m(\sphericalangle XOY) + m(\sphericalangle AOY) = 180°$ 1p

$2 \cdot m(\sphericalangle BOX) + 2 \cdot m(\sphericalangle YOZ) = 180°$

$2 \cdot 8 \cdot m(\sphericalangle YOZ) + 2 \cdot m(\sphericalangle YOZ) = 180° \Longrightarrow m(\sphericalangle YOZ) = 10° \Longrightarrow m(\sphericalangle XOY) = 20°$ 1p

b) $\Delta LOT \equiv \Delta ROT$ (L.U..L.) 1P

$[LT] \equiv [RT] \Longrightarrow \Delta TLR$ este isoscel 1p

c) $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle OTL \equiv \sphericalangle OTR \Longrightarrow (TO - bisectoarea \sphericalangle CTE \\ \sphericalangle TOE \equiv \sphericalangle TOC \Longrightarrow TO \perp EC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta TEC$ este isoscel 2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.