Inspectoratul Şcolar Judeţean Tulcea

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală, 28.februarie.2015
CLASA a VII-a

Subiectul I

a) Fie $x = \frac{6}{1} + \frac{11}{2} + \frac{16}{3} + \cdots + \frac{10076}{2015} - \left(1 + 2^{-1} + 3^{-1} + \cdots + 2015^{-1}\right)$. Calculaţi $\left(2014 - \frac{x}{5}\right)^{-2015}$

b) Aflaţi numerele întregi x , y , z ştiind că $x^2 - x + |y-3| + \left(z^2 - 16\right)^2 \leq 0$.

Subiectul II

Fie n un număr natural cu proprietatea că prima zecimală a numărului $\sqrt{n}$ este 2.

a) Daţi două exemple numerice de astfel de numere.

b) Arătaţi că există o infinitate de numere naturale cu această proprietate.

Subiectul III

În paralelogramul $ABCD$ notăm cu M mijlocul lui AB, N mijlocul lui CM , $DN \cap BC = \{P\}$ şi $DN \cap AB = \{Q\}$. Demonstraţi că triunghiurile NCP şi PBQ au aceeaşi arie.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare subiect se notează cu 7 puncte

	BAREM CLASA a VII-a	
Sub. I	a) $x = 5 + 1 + 5 + \frac{1}{2} + 5 + \frac{1}{3} + \cdots + 5 + \frac{1}{2015} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2015}\right) = 5 \cdot 2015$ $\left(2014 - \frac{x}{5}\right)^{-2015} = (-1)^{-2015} = -1$ b) Oricare x,y,z numere întregi $x^2 - x \geq 0$ $\|y - 3\| \geq 0$ $(z^2 - 16)^2 \geq 0$ Deci, $x^2 - x + \|y - 3\| + (z^2 - 16)^2 = 0$ Egalitatea are loc dacă $x^2 - x = 0, \|y - 3\| = 0, (z^2 - 16)^2 = 0$ Finalizare, soluţiile sunt (0,3,4),(0,3,-4),(1,3,4),(1,3,-4)	1 p 1 p 2p 1p 1p 1p
Sub. II	**a)** Oricare două numere cu proprietatea cerută.(Ex: 5,28,39,52,53,…) **b)** Pentru n număr cu proprietatea respectivă, fie $k = [\sqrt{n}]$, $0{,}2 \leq \{\sqrt{n}\} < 0{,}3 \Rightarrow 0{,}2 + k \leq \sqrt{n} < 0{,}3 + k$. Ridicând relaţia la pătrat se obţine $(0{,}2 + k)^2 \leq n < (0{,}3 + k)^2$. Există cel puţin un astfel de număr natural n, dacă $(0{,}3 + k)^2 - (0{,}2 + k)^2 > 1 \Leftrightarrow 0{,}1 \cdot (2k + 0{,}5) > 1 \Rightarrow k > 4{,}75.$ Deci pentru $k \geq 5$ există cel puţin un n cu proprietatea dată$\Rightarrow$număr infinit de numere. k=5$\Rightarrow$n=28, k=6$\Rightarrow$n=39,k=7$\Rightarrow$n=52 sau 53	1p 2 p 2 p 2p
Sub. III	(ULU) ΔCDN≡ΔMNQ. Deci DC=MQ reiese apoi că B este mijlocul lui [MQ], deci aria ΔMNB este aceeaşi cu aria ΔNBQ. Dar [BN] mediană în ΔMBC deci aria ΔMNB este aceeaşi cu aria ΔNBC. Finalizare. (Se scade aria ΔBNP)	2 p 2+1 p 1p 1p