Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a VII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

Varianta 1

1. Cinci fraţi au împreună 79 ani. Vârsta primului este $\frac{1}{7}$ din vârsta ultimului, iar $\frac{1}{2}$ din vârsta celui de-al doilea este $\frac{1}{4}$ din vârsta ultimului. Dacă mărim cu 17 ani vârsta primului, atunci media aritmetică a vârstelor primilor trei fraţi este egală cu vârsta celui de-al patrulea, iar dublul vârstei acestuia întrece cu 6 ani vârsta ultimului. Aflați vârstele celor 5 frați.

2. Să se demonstreze că: $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}<\frac{n}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

3. Rezolvați ecuația: $\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\ldots+\frac{x+98}{99}+\frac{x+99}{100}=2^5\cdot 3$

4. Fie ABC un triunghi echilateral și fie $D\in BC$ astfel încât $(DC)\equiv(BC)$), respectiv $E\in AC$ astfel încât $(AE)\equiv(AC)$. Dacă $DE\cap AB=\{F\}$ arătați că:

a) AB=3AF
b) DAF este triunghi dreptunghic.

5. Fie ABCD un pătrat în care s-a notat cu O intersecția diagonalelor. Construim pătratul OEFG congruent cu pătratul ABCD astfel încât $B\in(AE)$

a) Demonstrați că punctele B,C,G sunt coliniare!
b) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului BEO.
c) Dacă $OE\cap BC=\{K\}$ arătați că $CG\cdot KG=OE\cdot KE$.

Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a VII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

Varianta 2

1. Avem 3 cutii cu bile: în prima 3 bile galbene, în a doua 3 bile verzi, iar în a treia 3 bile albastre. Din prima cutie scoatem 3 bile, dintre care o bilă punem într-o altă cutie și 2 bile în cealaltă cutie. În continuare scoatem 3 bile din cea de a doua cutie, și la fel punem o bilă într-o altă cutie și 2 bile în cealaltă cutie. Continuăm procedeul cu cutia a treia, apoi începem din nou. Cum putem obține ca în final să avem 3 bile albastre în prima, 3 bile galbene în a doua, respectiv 3 bile verzi în a treia cutie?

2. Să se determine acele numere raționale pozitive, care satisfac simultan următoarele condiții:

(i) $a+b+c=77$;

(ii) $\frac{(a+4)^2+4}{8}=\frac{(b+6)^2+9}{18}=\frac{(c+12)^2+36}{72}$.

3. În triunghiul ABC $m(A)=30°$ și $[AB]\equiv[AC]$. Fie B' simetricul puctului B față de dreapta AC, C' simetricul puctului B' față de dreapta AB, iar A' simetricul puctului C' față de dreapta BC. Fie $AC\bigcap B'C'=\{E\}$. Să se demonstreze, că:

a) triunghiurile ABB' și ABC' sunt echilaterale și congruente;
b) ACC' și $A'BC'$ sunt triunghiuri dreptunghice, isoscele și congruente;
c) triunghiul $A'C'C$ este echilateral;
d) A', B și E sunt puncte coliniare;
e) A', C és B' sunt puncte coliniare.

4. În dreptunghiul $ABCD$ $AB=2\cdot BC$, E este mijlocul segmentului $[AB]$, $F\in[DC]$ astfel ca $\frac{DF}{FC}=\frac{1}{3}$. Se știe că $AC=20$ cm.

a) Arătați, că $AC\perp EF$.
b) Calculați aria patrulaterului $AECF$.
c) Cât este aria dreptunghiului $ABCD$?

Varianta 1

1. *Cinci fraţi au împreună 79 ani. Vârsta primului este $\frac{1}{7}$ din vârsta ultimului, iar $\frac{1}{2}$ din vârsta celui de-al doilea este $\frac{1}{4}$ din vârsta ultimului. Dacă mărim cu 17 ani vârsta primului, atunci media aritmetică a vârstelor primilor trei fraţi este egală cu vârsta celui de-al patrulea, iar dublul vârstei acestuia întrece cu 6 ani vârsta ultimului. Aflaţi vârstele celor 5 fraţi.*

Rezolvare

Fie a, b, c, d, e vârstele celor cinci frați.

$a+b+c+d+e=79$ (1) .... **1 p**

$\frac{a+17+b+c}{3}=d \Rightarrow a+17+b+c=3d$ (2) .... **1 p**

$2d-6=e$ (3) .... **1 p**

Înlocuind relațiile (2) și (3) în (1) se obține

$3d+d+2d-6=96 \Rightarrow 6d=102 \Rightarrow d=17$ .... **2 p**

$\Rightarrow e=28$ .... **1 p**

Din $a=\frac{1}{7}e$ și $\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}e$ rezultă $a=4, b=14, c=16$ .... **3 p**

2. *Să se demonstreze că:* $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}<\frac{n}{2}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Rezolvare

$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}=\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{1+2}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{2+3}+\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{3+4}+\ldots+\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n+(n+1)}$ ....

Folosind inegalitatea mediilor $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}$ ....

se obține

$\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{1+2}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{2+3}+\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{3+4}+\ldots+\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n+(n+1)}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}=n\cdot\frac{1}{2}$ ....

3. *Rezolvați ecuația:* $\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\ldots+\frac{x+98}{99}+\frac{x+99}{100}=2^5\cdot 3$

Rezolvare

$\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\ldots+\frac{x+98}{99}+\frac{x+99}{100}=\frac{x}{5}+\frac{4}{5}+\frac{x}{6}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{x}{99}+\frac{98}{99}+\frac{x}{100}+\frac{99}{100}=$

....

$=\frac{x}{5}+\frac{x}{6}+\ldots\frac{x}{99}+\frac{x}{100}+1-\frac{1}{5}+1-\frac{1}{6}+\ldots+1-\frac{1}{99}+1-\frac{1}{100}=$ ....

$=x\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)+\underbrace{(1+1+\ldots+1+1)}_{96}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)=96$ ....

$\Rightarrow x\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)=0$ ....

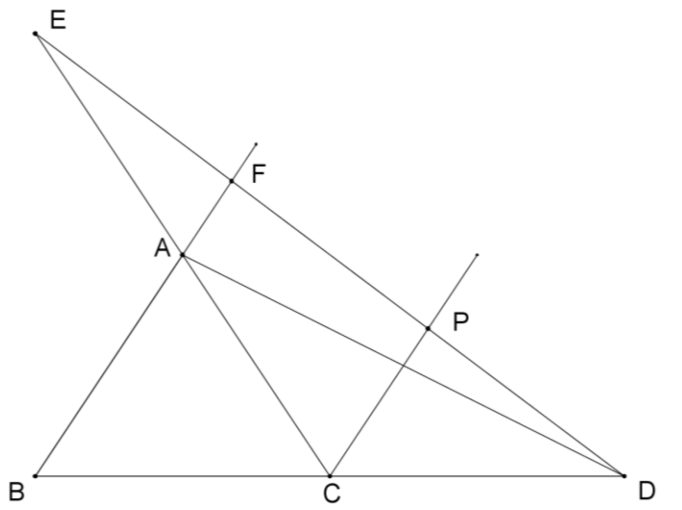
$\Rightarrow x=1$ ....

4. *Fie ABC un triunghi echilateral şi fie $D \in BC$ astfel încât $(DC)\equiv(BC)$, respectiv $E \in AC$ astfel încât $(AE)\equiv(AC)$. Dacă $DE \cap AB=\{F\}$ arătaţi că:*

a) AB=3AF

b) DAF este triunghi dreptunghic.

Rezolvare



Desen ....

a) CP l.m. în triunghiul BDF $\Rightarrow CP=\dfrac{BF}{2}=\dfrac{AB+AF}{2}$ (1)..

AF l.m. în triunghiul ECP $\Rightarrow AF=\dfrac{CP}{2}$ (2) ....

Din (1) și (2) rezultă $AF=\dfrac{AB+AF}{4}$ ....

$\Rightarrow 4AF=AB+AF$ de unde $3AF=AB$ ....

b) triunghiul ACD este isoscel și $m\left(ACD\right)=120^o \Rightarrow m\left(CAD\right)=30^o$ ....

$m\left(BAD\right)=m\left(BAC\right)+m\left(CAD\right)=60^o+30^o=90^o$ ....

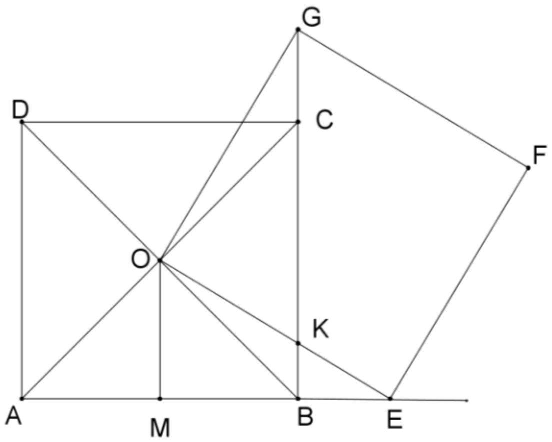
5. *Fie ABCD un pătrat în care s-a notat cu O intersecţia diagonalelor. Construim pătratul OEFG congruent cu pătratul ABCD astfel încât* $B\in(AE)$.

a) Demonstraţi că punctele B,C,G sunt coliniare!

b) Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului BEO

c) Dacă $OE\cap BC=\{K\}$ *arătaţi că* $CG\cdot KG=OE\cdot KE$.

Rezolvare



Desen ....

a) $OBE_\Delta \equiv OCG_\Delta$ (1)..

$m\left(OBE\right)=135^o$ (2) ....

Din (1) și (2) rezultă $m\left(OCG\right)=45^o+135^o=180^o \Rightarrow B,C,G$ sunt coliniare ....

b) $OM\perp AB$ și $OM=\dfrac{OE}{2}\Rightarrow m\left(BEO\right)=m\left(MEO\right)=30^o$ ....

$m\left(OBE\right)=135^o \Rightarrow m\left(BOE\right)=15^o$ ....

c) $KBE_\Delta \sim KOG_\Delta$ ....

$\Rightarrow \dfrac{KE}{KG}=\dfrac{BE}{OG}=\dfrac{CG}{OE} \Rightarrow KE\cdot OE=KG\cdot CG$ ....

Varianta 2

6. *Avem 3 cutii cu bile: în prima 3 bile galbene, în a doua 3 bile verzi, iar în a treia 3 bile albastre. Din prima cutie scoatem 3 bile, dintre care o bilă punem într-o altă cutie și 2 bile în cealaltă cutie. În continuare scoatem 3 bile din cea de a doua cutie, și la fel punem o bilă într-o altă cutie și 2 bile în cealaltă cutie. Continuăm procedeul cu cutia a treia, apoi începem din nou. Cum putem obține ca în final să avem 3 bile albastre în prima, 3 bile galbene în a doua, respectiv 3 bile verzi în a treia cutie?*

Rezolvare

Pașii sunt ilustrați în tabelul de mai jos:

Pași	Cutia I			Cutia II			Cutia III		
	galben	verde	albastru	galben	verde	albastru	galben	verde	albastru
	3	–	–	–	3	–	–	–	3
1.	–	–	–	2	3	–	1	–	3
2.	–	1	–	2	–	–	1	2	3
3.	–	1	2	2	–	1	1	2	–
4.	–	–	–	2	1	2	1	2	1
5.	–	–	1	2	–	–	1	3	2
6.	–	–	3	3	–	–	–	3	–

Fiecare pas 1,5 puncte .... **9 p**

7. Să se determine acele numere raționale pozitive, care satisfac simultan următoarele condiții:

a. $a+b+c=77$;

b. $\dfrac{(a+4)^2+4}{8}=\dfrac{(b+6)^2+9}{18}=\dfrac{(c+12)^2+36}{72}$.

Rezolvare

$\dfrac{(a+4)^2}{8}+\dfrac{4}{8}=\dfrac{(b+6)^2}{18}+\dfrac{9}{18}=\dfrac{(c+12)^2}{72}+\dfrac{36}{72}$ .... **1 p**

Scădem $\dfrac{1}{2}$ din fiecare membru $\Rightarrow \dfrac{(a+4)^2}{8}=\dfrac{(b+6)^2}{18}=\dfrac{(c+12)^2}{72}$ .... **1 p**

Înmulțim cu 2 $\Rightarrow \dfrac{(a+4)^2}{4}=\dfrac{(b+6)^2}{9}=\dfrac{(c+12)^2}{36}$ .... **1 p**

$\Rightarrow \left(\dfrac{a+4}{2}\right)^2=\left(\dfrac{b+6}{3}\right)^2=\left(\dfrac{c+12}{6}\right)^2 \Rightarrow$

$\dfrac{a+4}{2}=\dfrac{b+6}{3}=\dfrac{c+12}{6} \Rightarrow \dfrac{a}{2}+2=\dfrac{b}{3}+2=\dfrac{c}{6}+2$ .... **2 p**

$\Rightarrow \dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{6}=\dfrac{a+b+c}{2+3+6}=\dfrac{77}{11}=7$ .... **2 p**

Obținem: $a=14$, $b=21$ és $c=42$ ....

Pentru $l=2$ avem $y=16, x=54$ și $\dfrac{54}{3}=18>16$ ....

8. *În triunghiul ABC $m(A)=30°$ și $[AB]\equiv[AC]$. Fie B' simetricul puctului B față de dreapta AC, C' simetricul puctului B' față de dreapta AB, iar A' simetricul puctului C' față de dreapta BC. Fie $AC\cap B'C'=\{E\}$. Să se demonstreze, că:*

a. triunghiurile ABB' și ABC' sunt echilaterale și congruente;

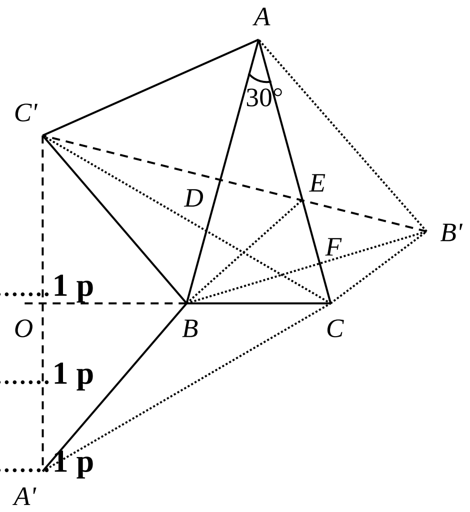
b. ACC' și $A'BC'$ sunt triunghiuri dreptunghice, isoscele și congruente;

c. triunghiul $A'C'C$ este echilateral;

d. A', B și E sunt puncte coliniare;

e. A', C és B' sunt puncte coliniare.

Rezolvare



a) Fie $BB'\cap AC=\{F\}$, $B'C'\cap AB=\{D\}$ și $A'C'\cap BC=\{O\}$ (figura) ....

$\triangle ABF\equiv\triangle AB'F \Rightarrow m(BAB')=60°$ și $[AB]\equiv[AB'] \Rightarrow \triangle ABB'$ isoscel..

AB este mediatoarea lui $(B'C') \Rightarrow [AC']\equiv[AB']$ și $[BC']\equiv[BB'] \Rightarrow$

$\triangle ABC'$ isoscel..

$\triangle ABB'\equiv\triangle ABC'$ ....

b) $m(CAC')=90^\circ$ și $[AC]\equiv[AC'] \Rightarrow ACC'$ este triunghi dreptunghic isoscel .... **1 p**

$m(ABC)=75^\circ$ și $m(ABC')=60^\circ \Rightarrow m(OBC')=180^\circ-75^\circ-60^\circ=45^\circ \Rightarrow$

$m(A'BC')=90^\circ$ .... **2 p**

$[A'B]\equiv[C'B] \Rightarrow A'BC'$ este triunghi dreptunghic isoscel .... **1 p**

$[AC']\equiv[C'B] \Rightarrow \triangle ACC' \equiv \triangle A'BC'$ .... **1 p**

c) $m(ACC')=45^\circ$ și $m(ACB)=75^\circ \Rightarrow m(OCC')=30^\circ$ .... **1 p**

$m(A'CO)=m(C'CO)=30^\circ \Rightarrow m(A'CC')=60^\circ$, dar $[CC']\equiv[CA'] \Rightarrow A'C'C$ triunghi echilateral .... **2 p**

d) E este ortocentru în triunghiul echilateral $ABB' \Rightarrow$ (BE bisectoare $\Rightarrow$

$m(ABE)=30^\circ$ .... **1 p**

$m(A'BE)=m(A'BC')+m(C'BA)+m(ABE)=90^\circ+60^\circ+30^\circ=180^\circ$ .... **2 p**

Punctele A', B și E sunt coliniare .... **0,5 p**

e) $m(A'CB')=m(A'CC')+m(C'CA)+m(ACB')=60^\circ+45^\circ+75^\circ=180^\circ$ .... **1 p**

Punctele A', C și B' sunt coliniare .... **0,5 p**

9. *În dreptunghiul ABCD* $AB=2\cdot BC$, *E este mijlocul segmentului* $[AB]$,

$F\in[DC]$ *astfel ca* $\dfrac{DF}{FC}=\dfrac{1}{3}$.

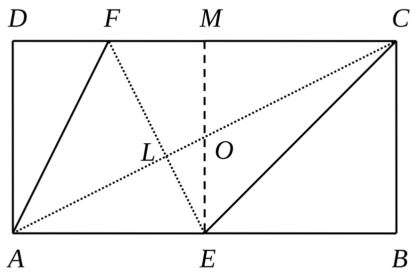
Se știe că $AC=20$ *cm.*

i) Arătați, că $AC\perp EF$.

ii) Calculați aria patrulaterului AECF.

iii) Cât este aria dreptunghiului ABCD?

Rezolvare



a) Fie M mijlocul lui $[DC] \Rightarrow F$ mijlocul lui $[DM]$. $AC\cap ME=\{O\} \Rightarrow$ O mijlocul lui $[ME]$.

Fie $FE\cap AC=\{L\}$ (figura) ....

$\triangle AEO \equiv \triangle EMF$ (cazul c-c) ....

$\Rightarrow EAL \equiv LEO$, de $m(LEO)+m(AEL)=90^\circ$

$\Rightarrow m(EAL)+m(AEL)=90^\circ$ ....

$m(ALE)=90^\circ \Rightarrow AC\perp EF$ ....

b) $A_{AECF}=A_{AEF}+A_{CEF}=\dfrac{EF\cdot AL}{2}+\dfrac{EF\cdot CL}{2}=\dfrac{EF}{2}\cdot(AL+CL)=\dfrac{EF\cdot AC}{2}$ ....

$AC=20$ cm, $AO=\dfrac{AC}{2}$ și $EF=AO \Rightarrow EF=10$ cm ....

Deci $A_{AECF}=\dfrac{10\cdot 20}{2}=100$ cm^2 ....

c) $A_{ADF}=\dfrac{1}{8}A_{ABCD}$ és $A_{BEC}=\dfrac{1}{4}A_{ABCD} \Rightarrow A_{ADF}+A_{BEC}=\dfrac{3}{8}A_{ABCD} \Rightarrow$

$A_{AECF}=\dfrac{5}{8}A_{ABCD}$ ....

$A_{ABCD}=\dfrac{8}{5}A_{AECF}=\dfrac{8}{5}\cdot 100=\dfrac{800}{5}=160$ cm^2 ....