Ministerul Educației și Cercetării Științifice
Inspectoratul Școlar Județean Vaslui

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Clasa a XI-a

1. Pentru orice două numere pozitive x şi y considerăm determinantul:

$$\Delta(x;y)=\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$$

a) Arătaţi că $\Delta(x;y)\geq 0$, $(\forall)x,y\in[0,\infty)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\Delta(1;x)}{\sqrt{2x^3-3x^2+2}-1}$.

2. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_0>0$ şi $a_{n+1}=\dfrac{16a_n^3+15a_n}{16}$, $(\forall)n\in \mathrm{N}$

a) Arătaţi că, pentru $a_0\in(0;\frac{1}{4}]$, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

b) Arătaţi că, pentru $a_0>\frac{1}{4}$, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este divergent.

3. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det A=\det B=1$. Să se demonstreze echivalenţa $(AB-BA)^2=O_2 \Leftrightarrow A^2+B^2=A^{-1}BAB+B^{-1}ABA$.

Gazeta matematică

4. a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]+[2x]+...[nx]}{x}, n\in\mathbb{N}^*$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b)Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ pentru care există şi sunt finite $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\ln n}=l$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_{n+1}-a_n)=L$. Să se determine relaţia între l şi L.

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Soluții și bareme orientative – Clasa a XI-a

1. Pentru orice două numere pozitive x şi y considerăm determinantul:

$$\Delta(x;y)=\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$$

a) Arătaţi că $\Delta(x;y)\geq 0$, $(\forall)x,y\in[0,\infty)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\Delta(1;x)}{\sqrt{2x^3-3x^2+2}-1}$.

Soluție.

a) $\Delta(x,y)=(x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 1 & x & y \\ 1 & y & x \end{vmatrix}$	**1 p**
$\Delta(x,y)=(x+2y)(x-y)^2$	**1 p**
$\Delta(x,y)\geq 0$, $\forall x,y\in[0,\infty)$	**1 p**
b) $\Delta(1,x)=(1+2x)(1-x)^2=2x^3-3x^2+1$	**1 p**
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\Delta(1,x)}{\sqrt{2x^3-3x^2+2}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{\sqrt{2x^3-3x^2+2}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\dfrac{\left((2x^3-3x^2+1)+1\right)^{\frac{1}{2}}-1}{2x^3-3x^2+1}}$	**2 p**
Se obține limita egală cu 2.	**1 p**

2. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_0 > 0$ şi $a_{n+1} = \dfrac{16a_n^3 + 15a_n}{16}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că, pentru $a_0 \in (0; \frac{1}{4}]$, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

b) Arătaţi că, pentru $a_0 > \frac{1}{4}$, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este divergent.

Soluție.

Se demonstrează prin inducţie matematică P(n): $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$	**0,5 p**
a) $a_0 \in (0; \frac{1}{4})$ $a_1 - a_0 = \dfrac{16a_0^3 + 15a_0}{16} - a_0 = \dfrac{16a_0^3 - a_0}{16} = \dfrac{a_0(4a_0 - 1)(4a_0 + 1)}{16} < 0$	**0,5 p**
Se demonstrează prin inducţie matematică P(n): $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ P(0) adevărată Din $a_{k+1} > a_k$ se obţine $\dfrac{16a_{k+1}^3 + 15a_{k+1}}{16} > \dfrac{16a_k^3 + 15a_k}{16}$, deci $a_{k+2} > a_{k+1}$	**1 p**
Șirul este descrescător şi mărginit inferior, deci este convergent şi există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \left[0; \frac{1}{4}\right)$.	**0,5 p**
Se trece la limită în relaţia de recurenţă şi se rezolvă $16l^3 - l = 0$. Se obţine $l = 0$.	**0,5 p**
Dacă $a_0 = \frac{1}{4}$, se demonstrează prin inducţie că $a_n = \frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ cu limita $\frac{1}{4}$.	**0,5 p**
b)pentru $a_0 \in (\frac{1}{4}; \infty)$ se observă că $a_1 - a_0 = \dfrac{16a_0^3 + 15a_0}{16} - a_0 = \dfrac{16a_0^3 - a_0}{16} = \dfrac{a_0(4a_0 - 1)(4a_0 + 1)}{16} > 0$	**0,5 p**
Se demonstrează prin inducţie matematică P(n): $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.	**0,5 p**
Șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \left(\frac{1}{4}; \infty\right]$.	**1 p**
Presupunem că $l \in \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$. Se trece la limită în relaţia de recurenţă şi se observă că ecuaţia $16l^3 - l = 0$ nu are soluţii în $\left(\frac{1}{4}; \infty\right)$.	**1 p**
Rămâne că $l = \infty$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este divergent.	**0,5 p**

3. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det A = \det B = 1$. Să se demonstreze echivalenţa $(AB - BA)^2 = O_2 \iff A^2 + B^2 = A^{-1}BAB + B^{-1}ABA$.

Gazeta matematică

Soluție.

Din relaţia Hamilton-Cayley obţinem $A^2 - t \cdot A + I_2 = O_2$, unde $t =$ urma matricei A şi $B^2 - s \cdot B + I_2 = O_2$, unde $s =$ urma matricei B.	**1 p**
Din $A(-A + t \cdot I_2) = I_2$ şi $B(-B + s \cdot I_2) = I_2$ se observă că $A^{-1} = -A + t \cdot I_2$ şi $B^{-1} = -B + s \cdot I_2$.	**1 p**
$A^2 + B^2 = ABB^{-1}A + BAA^{-1}B = AB(sI_2 - B)A + BA(tI_2 - A)B =$ $sABA - ABBA + tBAB - BAAB$	**2 p**
$A^{-1}BAB + B^{-1}ABA = (tI_2 - A)BAB + (sI_2 - B)ABA =$ $tBAB - ABAB + sABA - BABA$	**2 p**
Avem $A^2 + B^2 = A^{-1}BAB + B^{-1}ABA \iff ABBA + BAAB = ABAB + BABA \iff (AB - BA)^2 = O_2$	**1 p**

4. **a)**Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{[x] + [2x] + ...[nx]}{x}, n \in \mathbb{N}^*$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b)Fie şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ pentru care există şi sunt finite $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{\ln n} = l$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} n(a_{n+1} - a_n) = L$. Să se determine relaţia între l şi L.

Soluție.

a) $kx \leq [kx] < kx + 1, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$	**1 p**
Pentru $x > 0$, avem $k \leq \dfrac{[kx]}{x} < \dfrac{kx+1}{x}, \forall k \in \mathbb{N}^*$	**1 p**
Conform criteriului cleştelui obţinem $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{[kx]}{x} = k, \forall k \in \mathbb{N}^*$	**1 p**
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{[x] + [2x] + ...[nx]}{x} = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	**1 p**
b)Deoarece $b_n = \ln n, n \in \mathbb{N}^*$ este un şir strict crescător şi nemărginit superior, iar $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{\ln n} = l$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n(a_{n+1} - a_n)}{n \ln \frac{n+1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n(a_{n+1} - a_n)}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = L$ există şi sunt finite, conform Stolz-Cesaro obţinem $l = L$	**1 p** **1 p** **1 p**