

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică  
Clasa a XII-a  
Craiova, 9 februarie 2013  
Barem de corectare

**Problema 1.**

Oficiu	1p
(i)	4p
(ii), „ $\Rightarrow$ ”	2p
„ $\Leftarrow$ ”	3p
Total	10p

**Problema 2.**

Oficiu	1p
Presupunere prin absurd	3p
Există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(a) = -1$	2p
$a = 0$	2p
$1 = -1$ , absurd	2p
Total	10p

**Problema 3.**

Oficiu	1p
Identitatea $\sin x \cos x \cos(2x) \dots \cos(2^{2013}x) = \frac{\sin(2^{2014}x)}{2^{2014}}$	5p
Finalizare	4p
Total	10p

**Problema 4.**

Oficiu	1p
--------	----

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

admite primitive \_\_\_\_\_ 3p

$f = g + h$  cu

$$h(x) = \begin{cases} a, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ b, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

\_\_\_\_\_ 2p

$f$  admite primitive dacă și numai dacă  $h$  admite primitive \_\_\_\_\_ 3p

$f$  admite primitive dacă și numai dacă  $a = b = 0$  \_\_\_\_\_ 1p

Total \_\_\_\_\_ 10p

Inspectoratul Școlar Județean Dolj  
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică  
Clasa a XII-a  
Craiova, 9 februarie 2013

**Problema 1.** Pe  $Z$  considerăm legea de compoziție internă „ $\circ$ ” definită pentru  $x, y \in Z$  prin

$$x \circ y = axy + b(x + y) + c,$$

unde  $a, b, c \in Z$ .

Să se arate că:

(i) Legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă dacă și numai dacă

$$b^2 - b - ac = 0.$$

(ii) Dacă  $b^2 - b - ac = 0$ , atunci legea de compoziție „ $\circ$ ” admite element neutru dacă și numai dacă  $b$  divide  $c$ .

\*\*\*

**Problema 2.** Să se arate că grupurile  $(R, +)$  și  $(R^*, \cdot)$  nu sunt izomorfe.

\*\*\*

**Problema 3.** Să se calculeze  $\int \sin x \cos x \cos(2x) \dots \cos(2^{2013}x) dx$ .

\*\*\*

**Problema 4.** Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât  $f : [-1, 1] \rightarrow R$ ,

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ b + \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

să admită primitive pe  $[-1, 1]$ .

(Gazeta Matematică)

**Notă:**

Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;

Timp de lucru: 3 ore.