



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

- a) Legyenek $az a, b \in \mathbf{R}, a < b$ számok és $x, y, z \in [a, b]$. Bizonyítsátok be, hogy az x, y és z számok számtani közeparányosa is eleme az $[a, b]$ intervallumnak.
 - b) Legyenek az A_1, A_2, A_3 nem kollineáris pontok. Jelöljük $\overline{A_1A_2} = \vec{u}$ és $\overline{A_2A_3} = \vec{v}$. Bármely $n \in \mathbf{N}, n \geq 4$ esetén az $A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}$ háromszög súlypontját jelöljük $A_n - nel$, valamint bármely $n \in \mathbf{N}^*$ esetén legyenek az $x_n, y_n \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $\overline{A_1A_n} = x_n \vec{u} + y_n \vec{v}$.
 - i. Számítsátok ki x_6 és y_6 .
 - ii. Mutassátok ki, hogy bármely $n \in \mathbf{N}, n \geq 5$ esetén $x_n \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ és $y_n \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Prof. Daly Marciuc

- a) Legyen $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2 + 2n}, \forall n \geq 1$.
 - a. Határozzátok meg a sorozat általános tagját..
 - b. Számítsátok ki az $S = \sum_{k=1}^n (2k + 1)a_k^2$ összeget és igazoljátok, hogy $S < 1$.

Prof. Traian Tămâian

- Legyen $ABCD$ paralelogramma és G az ABC háromszög súlypontja. Legyen M az $[AD]$ szakasz egy pontja és D az $[NC]$ szakasz egy pontja. Igazoljátok, hogy G, M, N pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha $\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică

- Az ABC háromszögben $m(\angle ACB) = 90^\circ$. Legyen $M \in (BC), Q \in (AB)$ illetve $N \in (AC)$ úgy,

hogy $MQNC$ téglalap. Ha I az ABC háromszögbe írt kör középpontja és G az $MQNC$ téglalap középpontja, igazoljátok, hogy az A, I és G pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha $AQ = AC$.

Prof. Alexandru Blaga



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

Barem de corectare

1. a. Demonstrarea proprietății – 2p. b. Găsirea relației de recurență și a primilor trei termeni ai șirurilor – 1p.

$$x_4 = \frac{2}{3}, y_4 = \frac{1}{3}, x_5 = \frac{8}{9}, y_5 = \frac{4}{9}, x_6 = \frac{23}{27}, y_6 = \frac{16}{27} - 2p$$

$$x_5, x_6, x_7 \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \text{ și } y_5, y_6, y_7 \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right] - 1p$$

Demonstrarea prin inducție – 1p.

2. a) $a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}$ și $a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}$ 1p

P(n) : $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ 1p

Demonstrația prin inducție 2p

b) S $= \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ 3p

3. A, I, G coliniare dacă și numai dacă $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AG} = \alpha \overrightarrow{AI}$ 1p

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC}$$
 1p

$$\overrightarrow{AL} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}, AI \cap BC = \{L\}$$
 1p

Notăm $AQ = x$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{c} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right)$ 1p

$$\overrightarrow{AG} = \alpha \overrightarrow{AI} \text{ devine } \frac{1}{2} \left(\frac{x}{c} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right) = \frac{\alpha b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$$
 1p

$$\frac{x}{2c} = \frac{\alpha b}{a+b+c} \text{ și } \frac{1}{2} = \frac{\alpha c}{a+b+c}$$
 1p

Deci raportul lor va fi $\frac{x}{c} = \frac{b}{c}$ adică $x = b$, $AQ = AC$.

4. Fixarea reperului $\overrightarrow{AD} = \vec{u}, \overrightarrow{AE} = \vec{v}$ – 1p



$$\frac{CN}{ND} = k_1, \frac{AM}{MD} = k_2; \text{ punctele } G, M \text{ și } N \text{ sunt coliniare dacă și numai dacă}$$
$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AG} + (1 - \alpha) \overrightarrow{AN} - 1p;$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{k_2}{1 - k_2} - 1p; \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \vec{u} + \frac{2}{3} \vec{v} - 1p; \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} - k_1 \overrightarrow{AD}}{1 - k_1} = \vec{u} + \frac{1}{1 - k_1} \vec{v} - 1p;$$
$$k_1 - k_2 = \frac{1}{2} - 2p.$$