Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Varianta 1

Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 15 februarie 2014

1. Pe tablă scriem numerele 1, 2, 3, ..., 2014. Ştergem două numere, pe a şi b şi în locul lor scriem numărul $ab+a+b$. Procedând la fel de 2013 ori, care este numărul care rămâne pe tablă?

2. Fie $C([0,1])=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid f \text{ continuă}\}$. Să se arate că $(C([0,1]),+,\cdot)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero!

3. Să se determine funcţia $f:\mathbb{Z}_7\to\mathbb{Z}_7$ astfel încât să avem $f(x)+f(4x)=\hat{3}x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_7$.

4. Să se calculeze: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$

5. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$

Kovács Lajos

Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Varianta 2

Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 15 februarie 2014

1. Fie mulţimea $G=(0,\pi)$ şi legea de compoziţie $xoy=arcctg(ctgx+ctgy),\forall x,y\in G$

a) Arătaţi că (G,o) este grup abelian.

b) Arătaţi că grupul (G,o) este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup si e elementul său neutru. Elementele $a,b\in G$ satisfac condiţiile: $b^6=e$ şi $ab=b^4a$. Arătaţi că: $b^3=e$ şi $ab=ba$.

3. Fie $(G,\circ)$ un grup cu 625 elemente, în care ordinea fiecărui element este p. Determinaţi valoarea lui p.

4. Fie integrala $I_n=\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x}}}}_{n\ radicali}}dx$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Calculaţi: I_1,I_2

b) Aflaţi I_n unde $n\geq 3$.

5. Să se calculeze: $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

Poplauschi Francisc, György Éva