INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ **0372362000; 0372362001** 🖷 **0236319396**
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a XII-a

Problema 1.

a). Fie a>0 şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^6+4\cdot x^3+a\cdot x^2+4}$. Să se determine o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, cu $F(0)=0$.

b). Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}\cdot\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 0 & \text{, dacă } x=0\end{cases}$.

Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$, este mărginită dar nu îşi atinge marginile.

Problema 2.

Fie $\varepsilon=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ şi $\mathbb{Z}[\varepsilon]=\{a+b\cdot\varepsilon\,/\,a,b\in\mathbb{Z}\}$.

a) Să se demonstreze că $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ este monoid în raport cu înmulţirea numerelor complexe.

b) Să se determine elementele inversabile ale monoidului.

c) Dacă notăm cu $U(\mathbb{Z}[\varepsilon])$ grupul elementelor inversabile, să se demonstreze că $(U(\mathbb{Z}[\varepsilon]),\cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_6,+)$.

Problema 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $e^{f(x)}+f(x)\le x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Să se demonstreze că $\int_1^{e+1} f(x)dx\le\dfrac{3}{2}$.

Problema 4.

Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă funcţiile f, g :G → G, $f(x)=x^{2\cdot n}$ şi $g(x)=x^{3\cdot n}$ sunt morfisme surjective, atunci grupul $(G,\cdot)$ este comutativ.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) $\int f(x)dx = \int \frac{x^3-1}{\left(x^3+2\right)^2 + a\cdot x^2}dx = \int \frac{x^3-1}{x^2\cdot\left[\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^2+a\right]}dx =$ $= \int \frac{x-\frac{1}{x^2}}{\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^2+a}dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{\left(x^2+\frac{2}{x}\right)'}{\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^2+a}dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot arctg\frac{x^2+\frac{2}{x}}{\sqrt{a}}+C.$	**3p**
	Forma primitivei F este: $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot arctg\frac{x^2+\frac{2}{x}}{\sqrt{a}}+C_1, & x<0\\ 0, & x=0\\ \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot arctg\frac{x^2+\frac{2}{x}}{\sqrt{a}}+C_2, & x>0\end{cases}$ Funcţia F este continuă în x=0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) = F(0)=0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4\sqrt{a}}+C_1=0 \Rightarrow C_1=\frac{\pi}{4\sqrt{a}};$ $\frac{\pi}{4\sqrt{a}}+C_2=0 \Rightarrow C_2=-\frac{\pi}{4\sqrt{a}}.$ Deci $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot arctg\frac{x^2+\frac{2}{x}}{\sqrt{a}}+\frac{\pi}{4\sqrt{a}}, & x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot arctg\frac{x^2+\frac{2}{x}}{\sqrt{a}}-\frac{\pi}{4\sqrt{a}}, & x\geq 0\end{cases}$	**1p**

b).Pentru că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{1}{2}$, scriem funcţia f sub forma:

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}+\frac{1}{2}\cdot\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

1p

Notăm $g(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ şi $h(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

Funcţia g este continuă pe $\mathbb{R}$ ca produs de funcţii continue şi

$$0\le\left|\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos\frac{1}{x}\right|\le\left|\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{2}\right| \text{ şi } \lim_{x\to 0}\left|\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{2}\right|=0,$$

obţinem $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0=g(0)$. Din g continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că g admite primitive pe $\mathbb{R}$

1p

Arătăm că funcţia *h* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Funcţia $\mathrm{T}(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ este derivabilă pentru $x\neq 0$ şi $\mathrm{T}'(x)=2\cdot x\cdot\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ şi

$\mathrm{T}'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{T}(x)-\mathrm{T}(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0.$

Obţinem că $(\forall)x\in\mathbb{R},\ \mathrm{T}'(x)=\begin{cases}2\cdot x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}-h(x)$ *sau* $h(x)=-\mathrm{T}'(x)+p(x)$, unde

$p(x)=\begin{cases}2\cdot x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$. Fie $\mathrm{P}'(x)=p(x)$, atunci $h(x)=\left(P(x)-T(x)\right)'$,

adică *h* admite primitive.

Pentru că funcţiile g şi h admit primitive pe $\mathbb{R}$, rezultă că $\mathrm{f}(x)=g(x)+\dfrac{1}{2}\cdot h(x)$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

	Pentru mărginire, observăm că $\left\|f(x)\right\| \le \left\|\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right\|$ Fie $\varphi(x)=\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $x\in\mathbb{R}$ care este derivabilă, $\varphi'(x)=\dfrac{3}{4\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3}>0 \Rightarrow \varphi$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=-1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=1$. Observăm că $\left\|\varphi(x)\right\|<1$. Deci $\left\|f(x)\right\|<1 \Leftrightarrow -1<f(x)<1$; $-1=\inf f(x)$ pentru că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$; $1=\sup f(x)$ pentru că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$. Deci f nu îşi atinge marginile pe $\mathbb{R}$.	**1p**
2.	a). $\varepsilon=\frac{1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow \varepsilon^3=-1$ si $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$ $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ este parte stabilă în raport cu înmulţirea dacă: $(\forall)\, z_1=a_1+b_1\cdot\varepsilon,\ z_2=a_2+b_2\cdot\varepsilon\in\mathbb{Z}[\varepsilon]\Rightarrow z_1\cdot z_2\in\mathbb{Z}[\varepsilon]$ $z_1\cdot z_2=a_1\cdot a_2+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)\cdot\varepsilon+b_1\cdot b_2\cdot\varepsilon^2=a_1\cdot a_2+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)\cdot\varepsilon+b_1\cdot b_2\cdot(\varepsilon-1)=$ $(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1+b_1\cdot b_2)\cdot\varepsilon\in\mathbb{Z}[\varepsilon]$, unde $a_i,b_i\in\mathbb{Z}$, $i=\overline{1,2}$. Cum înmulţirea este asociativă pe $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{Z}[\varepsilon]\subset\mathbb{C}\Rightarrow$ înmulţirea este asociativă pe $\mathbb{Z}[\varepsilon]$. $1=1+0\cdot\varepsilon\in\mathbb{Z}[\varepsilon]$ şi $z\cdot1=1\cdot z=z$, $(\forall)\, z\in\mathbb{Z}[\varepsilon]$.	**3p**
	b). Fie $z=a+b\cdot\varepsilon$, $a,b\in\mathbb{Z}$, $z\ne0$. Dacă z este inversabil $\Rightarrow(\exists)\, z^{-1}=x+y\cdot\varepsilon$, $x,y\in\mathbb{Z}$, astfel încât $z\cdot z^{-1}=1\Rightarrow \|z\|\cdot\left\|z^{-1}\right\|=1\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}(a^2+a\cdot b+b^2)\cdot(x^2+x\cdot y+y^2)=1\\ \text{Dar } a, b, x, y\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow a^2+a\cdot b+b^2=1$ $a^2+a\cdot b+b^2=1\Leftrightarrow a^2+a\cdot b+b^2-1=0$, $\Delta_a\ge0$ şi $\Delta_a=$ pătrat perfect; $\left.\begin{array}{l}\Delta_a=4-3\cdot b^2\ge0\\ b\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Leftrightarrow b^2\in\{0,1\}$ $b^2=0\Rightarrow b=0\Rightarrow a=\pm1\Rightarrow z_1=1,\ z_2=-1$ $b^2=1\Rightarrow b=\pm1$; $b=1\Rightarrow a\in\{-1,0\}\Rightarrow z_3=-1+\varepsilon,\ z_4=\varepsilon$; $b=-1\Rightarrow a\in\{0,1\}\Rightarrow z_5=-\varepsilon,\ z_6=1-\varepsilon$.	**2p**

	c) $U\left(\mathbb{Z}[\varepsilon]\right)=\{1,\ -1,\ \varepsilon,\ -\varepsilon,\ -1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon\}$ Din $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0 \Rightarrow \varepsilon^2=\varepsilon-1,\ \varepsilon^3=-1,\ \varepsilon^4=-\varepsilon,\ \varepsilon^5=-\varepsilon^2=1-\varepsilon$; $U\left(\mathbb{Z}[\varepsilon]\right)=\left\{1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2\ ,\varepsilon^3\ ,\varepsilon^4\ ,\varepsilon^5\right\}$; Definim funcţia $f: U\left(\mathbb{Z}[\varepsilon]\right)\to\mathbb{Z}_6,\ f\left(\varepsilon^k\right)=\hat{k},\ (\forall)k\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Evident, funcţia f este bijectivă (f este surjectivă , iar domeniul de definiţie şi codomeniul au acelaşi cardinal). $f\left(\varepsilon^k\cdot\varepsilon^h\right)=f\left(\varepsilon^{k+h}\right)=f\left(\varepsilon^{(k+h)\bmod 6}\right)=\widehat{k+h}=\hat{k}+\hat{h}=f\left(\varepsilon^k\right)+f\left(\varepsilon^h\right)$, $(\forall)k,h\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Metoda 2. Grupurile $\left(U\left(\mathbb{Z}[\varepsilon]\right),\cdot\right)$ şi $\left(\mathbb{Z}_6,+\right)$ sunt grupuri ciclice finite, cu acelaşi cardinal $\Rightarrow$ ele sunt izomorfe.	2p
3.	Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(t)=e^t+t$ funcţie continuă, strict crescătoare. Pentru că $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^t+t\right)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^t+t\right)=\infty \Rightarrow g$ este bijectivă. (g este strict monotonă $\Rightarrow$ g este injectivă şi $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}\Rightarrow g$ surjectivă). $g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este strict crescătoare (fie $y_1<y_2$ şi există $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $g(x_1)=y_1, g(x_2)=y_2$. Din $g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2\Leftrightarrow g^{-1}(y_1)<g^{-1}(y_2)$. Din ipoteză $g\left(f(x)\right)\le x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ şi folosind g^{-1} strict crescătoare $\Rightarrow f(x)\le g^{-1}(x)$. Integrând pe $[1,e+1]$, obţinem $\int_1^{1+e} f(x)dx\le\int_1^{1+e} g^{-1}(x)dx$.	**4p**
	Calculăm $\int_1^{1+e} g^{-1}(x)\,dx$ prin schimbare de variabilă: $g^{-1}(x)=t\Rightarrow x=g(t)$. Pentru x=1 $\Rightarrow$ t=0; pentru x=1+e $\Rightarrow$ t=1. $g'(t)dt=dx$ $\int_1^{1+e} g^{-1}(x)dx=\int_0^1 t\cdot g'(t)dt=t\cdot g(t)\Big\vert_0^1-\int_0^1 g(t)dt=e+1-\int_0^1\left(e^t+t\right)dt=e+1-e^t\Big\vert_0^1-\frac{t^2}{2}\Big\vert_0^1=$ $e+1-e+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.	**3p**

4.	Vom arăta că $x^{2n-1}\cdot y=y\cdot x^{2n-1},\ (\forall)x,y\in G.$ $x^{2n-1}\cdot y=x^{2n}\cdot\left(x^{-1}\cdot y\right);$ Pentru că f este surjectivă $\Rightarrow(\exists)u\in G,\ f(u)=x^{-1}\cdot y\Leftrightarrow u^{2n}=x^{-1}\cdot y$ $x^{2n}\cdot\left(x^{-1}\cdot y\right)=x^{2n}\cdot u^{2n}=(x\cdot u)^{2n}=x\cdot(u\cdot x)^{2n-1}\cdot u=x\cdot(u\cdot x)^{2n}\cdot(u\cdot x)^{-1}\cdot u=$ $x\cdot u^{2n}\cdot x^{2n}\cdot x^{-1}\cdot u^{-1}\cdot u=x\cdot x^{-1}\cdot y\cdot x^{2n}\cdot x^{-1}\cdot u^{-1}\cdot u=y\cdot x^{2n-1}$ Deci $x^{2n-1}\cdot y=y\cdot x^{2n-1},\ (\forall)x,y\in G;$ Analog, se arată că $x^{3n-1}\cdot y=y\cdot x^{3n-1},\ (\forall)x,y\in G$	**4p**
	Fie $\mathrm{d}=(2n-1,3n-1)\Rightarrow \mathrm{d}\mid(2n-1)$ şi $d\mid(3n-1)$, deci $\mathrm{d}\mid(3n-1)-(2n-1)\Rightarrow \mathrm{d}\mid n;$ Cum $\mathrm{d}\mid 2n$ şi $\mathrm{d}\mid 2n-1,$ rezultă că $\mathrm{d}\mid 1,$ adică $(2n-1,3n-1)=1.$ Din caracterizarea celui mai mare divizor comun a două numere întregi, rezultă că există a, b $\in\mathbb{Z}$ astfel încât $(2n-1)\cdot a+(3n-1)\cdot b=1;$ Fie $x,y\in G.$ $x\cdot y=x^{(2n-1)\cdot a+(3n-1)\cdot b}\cdot y=\left(x^{a}\right)^{2n-1}\cdot\left(x^{b}\right)^{3n-1}\cdot y=\left(x^{a}\right)^{2n-1}\cdot y\cdot\left(x^{b}\right)^{3n-1}$ $=y\cdot\left(x^{a}\right)^{2n-1}\cdot\left(x^{b}\right)^{3n-1}=y\cdot x^{(2n-1)\cdot a+(3n-1)\cdot b}=y\cdot x.$	**3p**