



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 25 IANUARIE 2014**

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie A o matrice pătratică de ordin 3, cu toate elementele din mulțimea $\{-1, 1\}$.

- a) Determinați toate valorile posibile ale determinantului matricei A .
- b) Demonstrați că matricea A^n , $n \in \mathbb{N}^*$, are toate elementele nenule.

Problema 2. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A + B = I_3$ și $A^2 = A^3$. Să se arate că:

- a) $AB = BA$;
- b) $I_3 + AB$ este o matrice inversabilă.

Problema 3. Se consideră șirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ și $(c_n)_{n \geq 1}$ definite prin: $a_1 > 0$, $b_1 > 0$,

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad c_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Să se arate că $|c_{n+1} - \sqrt{2}| = (\sqrt{2} - 1) \left| \frac{a_n - b_n \sqrt{2}}{a_n + b_n} \right|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Problema 4. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(2x) - f(x)) = 0$. Demonstrați că $\forall a \in (0, +\infty)$, există $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(ax) - f(x))$ și valoarea acestei limite este 0.

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 4 puncte; b) 3 puncte; Problema 2. a) 2 puncte; b) 7 puncte; Problema 3. a) 3 puncte; b) 4 puncte; Problema 4. 7 puncte.

ENUNȚURI ȘI SOLUȚII

CLASA a IX-A

P1. IX. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ arătați că:

a) $(a+1)^2 + b^2 + (c-1)^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca+c-a-1)$;

b) $(a+1)b + (c-1)b + (a+1)(c-1) \leq (a+1)^2 + b^2 + (c-1)^2$;

c) $ab+bc+ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

Demonstrație: Putem presupune $a \leq b \leq c \Rightarrow \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} = c-a$

$$ab+bc+ca - a + c - 1 = (a+1)b + (c-1)b + (a+1)(c-1) \leq (a+1)^2 + b^2 + (c-1)^2 =$$

$$(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca+c-a-1) \Rightarrow ab+bc+ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

P2. IX. Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $x+y \neq 0$ și $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de numere reale. Arătați că:

a) Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt progresii aritmetice atunci șirul $(c_n)_{n \geq 1}$, definit prin $c_n = a_n b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică dacă și numai dacă una din progresiile aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ sau $(b_n)_{n \geq 1}$ are rația egală cu 0.

b) Dacă $(1+xa_{n+1})(1+ya_n) = 1, (x+y)(a_n b_n - 1) = xy a_n$ și $(x+y)b_n - xy \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ atunci șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică.

Demonstrație: a) $(x_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică $\Leftrightarrow 2c_n = c_{n-1} + c_{n+1} \Leftrightarrow 2a_n b_n = (a_n - x)(b_n - y) + (a_n + x)(b_n + y) \Leftrightarrow xy = 0$

b) $(x+y)(a_n b_n - 1) = xy a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{x+y}{(x+y)b_n - xy} \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (1+xa_{n+1})(1+ya_n) = 1 \Leftrightarrow b_{n+1} = -\frac{x}{y} b_n$

P3. IX. Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_1 = \frac{1}{6}$ și $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} \left(a_n + \frac{1}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Determinați a_{2014} .

Demonstrație:

$$n = 1: a_2 = \frac{2}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{6}$$

$$n = 2: a_3 = \frac{3}{5} \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{6}$$

$$P(n): a_n = \frac{n}{6}$$

$$P(1): a_1 = \frac{1}{6} \quad (A)$$

.....

$$P(n+1): a_{n+1} = \frac{n+1}{6}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{n+3}{6} = \frac{n+1}{6}$$

$$\text{Deci } a_{2000} = \frac{2000}{6} = \frac{1000}{3}$$

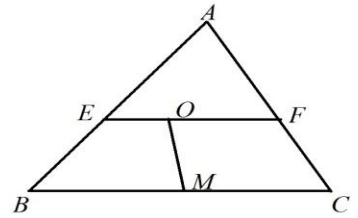
P4. IX. Dacă ABC este un triunghi oarecare și E, F, O, M sunt puncte cu proprietățile $E \in (AB)$, $F \in (AC)$, $O \in (EF)$, $M \in (BC)$, $\overline{BM} = 2\overline{MC}$, $5\overline{AE} = 7\overline{EB}$ și $12\overline{OM} = 3\overline{AB} + 2\overline{AC}$ demonstrați că $EF \parallel BC$.

Demonstrație: $5\overline{AE} = 7\overline{EB} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{7}{12}\overline{AB}$, fie $x \in (0, \infty)$ astfel încât $\overline{AF} = x\overline{FC} \Leftrightarrow \overline{AF} = \frac{x}{x+1}\overline{AC}$;

$$\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AF} = -\frac{7}{12}\overline{AB} + \frac{x}{x+1}\overline{AC} \quad (1); \quad 12\overline{OM} = 3\overline{AB} + 2\overline{AC} \Leftrightarrow$$

$$\overline{OB} + \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} \Leftrightarrow 2\overline{OB} + \overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} \Leftrightarrow$$

$$\overline{OB} = \frac{3}{4}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AC} \quad (2); \quad \overline{EO} = \overline{EB} + \overline{BO} \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} \quad (3); \quad \text{vectorii}$$



$$\overline{EF} \text{ și } \overline{EO} \text{ coliniari} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } \overline{EF} = \alpha \overline{EO} \stackrel{(1),(3)}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{7}{4} \text{ și } x = \frac{7}{5} \Rightarrow EF \parallel BC.$$

CLASA a X-A

P1. X. a) Arătați că $\log_a \sqrt{x} + \log_{a^2} \sqrt[3]{x} + \log_{a^3} \sqrt[4]{x} + \dots + \log_{a^n} \sqrt[n+1]{x} = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}$; $\forall a, x \in (0, \infty)$, $a \neq 1$.

Soluție :

$$a) \frac{1}{2} \log_a x + \frac{1}{2 \cdot 3} \log_a x + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \log_a x \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\log_a x \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) = \log_a x \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Finalizare $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

b) Determinați partea întreagă a numărului $N = \log_{2013} 2014 + \log_{2014} 2013 + 2013^{\log_{2014} 2015} - 2015^{\log_{2014} 2013}$.

Soluție :

$$b) 2013^{\log_{2014} 2015} - 2015^{\log_{2014} 2013} = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$x = \log_{2013} 2014 \in (1, 2) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$x + \frac{1}{x} \in [2, 3) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Finalizare $[N] = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

P2. X. a) Arătați că, pentru oricare două numere complexe z_1, z_2 , egalitatea $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$ este adevărată dacă și numai dacă $\exists \alpha \in (0, \infty)$ astfel încât $z_1 = \alpha z_2$.

Soluție :

$$b) \text{ Verificarea implicației } \leftarrow \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Implicația \rightarrow

$$z_k = a_k + b_k \cdot i \text{ si calcul } \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Obținerea relației $a_1 b_2 = b_1 a_2$ si finalizare $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$.

$$c) \text{ Determinați mulțimile } A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 + 2z + 2| + |z^2 + 2z + 1| = 1\} \text{ și } M = \{\operatorname{Re} z \mid z \in A\}.$$

Soluție :

b) $|z^2 + 2z + 2| + |z^2 + 2z + 1| = 1 \Leftrightarrow |z^2 + 2z + 2| + |z^2 + 2z + 1| = |z^2 + 2z + 2 + (-z^2 - 2z - 1)| \Leftrightarrow \dots 2$

puncte

$\exists \alpha \in (0, \infty)$ astfel încât $(\alpha + 1)z^2 + 2(\alpha + 1)z + \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \pm \frac{\sqrt{\alpha + 1}}{\alpha + 1}i \dots 1$ punct

Aflarea elementelor multimilor 1 punct

P3. X. a) Arătați că $\{\sqrt[3]{1 + a^x} + \sqrt[3]{1 - a^x} | x \in \mathbb{R}\} \subset (0, 2)$

Soluție :

a) Verificare $\sqrt[3]{1 + a^x} + \sqrt[3]{1 - a^x} > 0 \dots 1$ punct

$\sqrt[3]{1 + a^x} + \sqrt[3]{1 - a^x} < 1 + 1 \dots 1$ punct

$\sqrt[3]{1 + a^x} - 1 < 1 - \sqrt[3]{1 - a^x}$; amplificare cu conjugata

Finalizare $\sqrt[3]{1 + a^x} + \sqrt[3]{1 - a^x} < 2 \dots 1$ punct .

b) Dacă $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ arătați că $\frac{1}{2\sqrt[m]{1}} + \frac{1}{3\sqrt[m]{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[m]{n}} < m$.

Soluție :

b) $\frac{1}{(k+1)\sqrt[m]{k}} = \sqrt[m]{k^{m-1}} \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \sqrt[m]{k^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \dots 1$ punct

$\sqrt[m]{k^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[m]{k^{m-1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[m]{(k+1)^{m-1}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right) \cdot \left(1 + \dots + \sqrt[m]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{m-1}}\right) <$

$< \left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right) \cdot m \dots 2$ puncte

Inlocuire si finalizare 1 punct

P4. X. Fie numerele complexe distincte a, b, c astfel încât $(a+b)^3 = (b+c)^3 = (c+a)^3$. Să se arate că

$a^3 = b^3 = c^3$.

Soluție :

Din relatia din enunt si tinand cont de faptul ca a, b, c sunt disticte , rezulta ca a+b , b+c , c+a sunt distincte si nenule 1 punct

Atunci $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^3 = \left(\frac{a+b}{c+a}\right)^3 = 1$, de unde $a + b = \varepsilon(b + c) = \varepsilon^2(c + a)$, unde $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ si $\varepsilon^3 = 1$

..... 3 puncte

Adunand membru cu membru relatiile $a + b = \varepsilon(b + c)$, $b + c = \varepsilon(c + a)$, $c + a = \varepsilon(a + b)$

Se obtine $a + b + c = 0 \dots 1$ punct

Finalizare 2 puncte

CLASA a XII-A

P1. XII. a) Fie (G, \cdot) un grup și e elementul său neutru. Elementele $a, b \in G$ satisfac condiția:

$a^2 = b^2 = (ab)^2$. Să se arate că $a^4 = b^4 = e$.

b) Pe mulțimea A se definesc legile de compoziție „+” și „ \cdot ” cu proprietățile: $(A,+)$ este grup comutativ, (A,\cdot) este monoid necomutativ și $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$, $a^2+b^2=ab$; $a, b, c \in A$. Să se arate că $(ab)^2=b^2a^2$ și $(ba)^2=a^2b^2$.

Demonstrație: a)

$$a^2=(ab)^2 \Leftrightarrow a^2=abab \Rightarrow a=bab$$

$$b^2=(ab)^2 \Rightarrow b^2=abab \Rightarrow b=aba$$

$$\text{Atunci } ab=(bab)\cdot(aba) \Leftrightarrow ab=b(aba)ba \Leftrightarrow ab=b^3a$$

$$\text{Înmulțind la dreapta cu } a \text{ obținem } aba=b^3a^2 \Leftrightarrow b=b^3a^2 \Rightarrow b^2a^2=e$$

$$\text{Cum } a^2=b^2, \text{ ultima egalitate se scrie } a^4=e \Leftrightarrow b^4=e$$

b)

$$\text{Din } a^2+b^2=ab \Rightarrow a^3+ab^2=a^2b \text{ și } a^4+b^3=ab^2$$

de unde, prin adunare, se obține $a^3+b^3=0$

$$\text{Tot } a^2+b^2=ab \Rightarrow a^4+a^2b^2=a^3b \text{ și } a^2b^2=-a^4-b^4 \quad (1)$$

$$a^2+b^2=ab \Rightarrow b(a^2+b^2)a=baba \Rightarrow ba^3+ab^3=(ba)^2 \quad (2)$$

$$a^3+b^3=0 \Rightarrow ba^3+ab^3=-b^4-a^4 \quad (3)$$

$$\text{Din (1), (2) și (3) } \Rightarrow (ba)^2=a^2b^2$$

Pe de altă parte, $(ab)^2=(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+a^2b^2+b^2a^2$ și (1) implică

$$(ab)^2=b^2a^2$$

P2. XII. Fie p un număr prim de forma $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că nu există $x \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât $x^2+1=\hat{0}$ (în \mathbb{Z}_p).

b) Să se arate că dacă $x^2+y^2=\hat{0}$, $x, y \in \mathbb{Z}_p$, atunci $x=\hat{0}$ și $y=\hat{0}$.

c) Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $x^2+y^2=12005$.

Demonstrație:

a). Aplicăm Mica teoremă a lui Fermat: dacă

$$(x, p) = 1, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \mid x^{p-1} - 1 \Rightarrow p \mid x^{4k+2} - 1.$$

Presupunem că există $x \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât

$$x^2 + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow x^2 = -\hat{1} \Rightarrow x^{2(2k+1)} = (-\hat{1})^{2k+1} \Rightarrow \hat{1} = -\hat{1} (\text{fals}).$$

b). Presupunem că $(\exists) x, y \in \mathbb{Z}_p^*$ astfel

încât $x^2 + y^2 = \hat{0} \Leftrightarrow (xy^{-1})^2 + \hat{1} = \hat{0} (\text{fals})$. În concluzie singura soluție este

$$x = y = \hat{0}.$$

c). Ecuația se mai scrie $x^2 + y^2 = 2401 \cdot 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 7^4 \cdot 5$. Reducând

ecuația în $\mathbb{Z}_7 \Rightarrow x^2 + y^2 = \hat{0}, x, y \in \mathbb{Z}_7 \Rightarrow x = y = \hat{0}$.

Deci $x = 7 \cdot a, y = 7 \cdot b, a, b \in \mathbb{Z}$.

Ecuația devine

$$a^2 + b^2 = 49 \cdot 5;$$

La fel $a = 7m, b = 7n \Rightarrow m^2 + n^2 = 5 \Leftrightarrow$

$$(m, n) \in \{(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, 2), (1, -2), (-1, -2)\} \Rightarrow$$

$$(x, y) \in \{(98, 49), (98, -49), (-98, 49), (-98, -49)\} \cup$$

$$\{(49, 98), (-49, 98), (49, -98), (-49, -98)\}.$$

P3. XII. Dacă $x \in (0, \infty)$ calculați:

a) $\int \frac{1}{x(x^{2014} + 1)} dx;$

b) $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx.$

Demonstrație: a) $\frac{1}{x(x^{2014} + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^{2013}}{x^{2014} + 1} \Rightarrow \int \frac{1}{x(x^{2014} + 1)} dx = \ln x - \frac{1}{2014} \ln(x^{2014} + 1) + c, c \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{2} \int 1 dx - \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} dx$

P4. XII. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive. Să se arate că funcția

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x|f(x)$ admite primitive.

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot f(x), & x \geq 0 \\ -x \cdot f(x), & x < 0 \end{cases}; f \text{ admite primitive} \Rightarrow \exists F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ derivabilă, cu } F' = f$$

$$x \cdot f(x) = [x \cdot F(x)]' - F(x)$$

F derivabilă $\Rightarrow F$ continuă $\Rightarrow F$ admite primitive. Fie $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă, cu $H' = F$

$$x \cdot f(x) = [x \cdot F(x)]' - H'(x) = [x \cdot F(x) - H(x)]'; \quad -x \cdot f(x) = [-x \cdot F(x) + H(x)]'$$

Definim funcția $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} xF(x) - H(x) + c, & x \geq 0 \\ -xF(x) + H(x) + c', & x < 0 \end{cases}$. F, H sunt derivabile pe $\mathbb{R} \Rightarrow G$

derivabilă pe \mathbb{R}^* și $G' = g$ pe \mathbb{R}^*

$$G \text{ continuă în } x_0 = 0 \Rightarrow c' = c - 2H(0) \Rightarrow G(x) = \begin{cases} xF(x) - H(x) + c, & x \geq 0 \\ -xF(x) + H(x) + c - 2H(0), & x < 0 \end{cases}$$

$$G'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x F(x) - H(x) + c + H(0) - c}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (F(x) - \frac{H(x) - H(0)}{x}) = F(0) - H'(0) = F(0) - F(0) = 0$$

$$G'_z(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x F(x) + H(x) + c - 2H(0) + H(0) - c}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-F(x) + \frac{H(x) - H(0)}{x}) = -F(0) + H'(0) = -F(0) + F(0) = 0$$

$\Rightarrow G$ derivabilă în $x_0 = 0$ și $G'(0) = g(0) = 0$. În concluzie, G e o primitivă pentru g , deci funcția g admite primitive.

CLASA a XI-A

P1. XI. Fie A o matrice pătratică de ordin 3, cu toate elementele din mulțimea $\{-1, 1\}$.

a) Determinați toate valorile posibile ale determinantului matricei A .

b) Demonstrați că matricea $A^n, n \in \mathbb{N}^*$, are toate elementele nenule.

Demonstrație:

a) Dacă adunăm prima linie la liniile 2 și 3, pe aceste linii vor fi numai numere pare. Scoatem factor 2 de pe fiecare dintre ele și obținem că determinantul matricei A , care este număr întreg, se divide cu 4.

Însă $\det A$ este sumă de șase termeni, fiecare egal cu 1 sau cu -1 , prin urmare are valoarea cuprinsă între -6 și 6 . Rezultă că $\det A \in \{-4, 0, 4\}$ și se constată imediat că toate cele trei valori sunt posibile.

b) Se demonstrează ușor, prin inducție matematică, faptul că matricea A^n are toate elementele impare, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. În particular, toate elementele lui A^n vor fi nenule.

P2. XI. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A + B = I_3$ și $A^2 = A^3$. Să se arate că:

a) $AB = BA$;

b) $I_3 + AB$ este o matrice inversabilă.

Demonstrație:

a) Scrie $B = I_3 - A$

Inmulteste la stanga si la dreapta relatia anterioara cu A

Deduce $AB = BA$

b) Inmulteste $A + B = I_3$ la stanga cu $A, A^2 + AB = A$ la dreapta cu A si obtine $ABA = O_3$

Scrie $(AB)^2 = (ABA)B$ de unde $(AB)^2 = O_3$

Din $I_3 = I_3 - (AB)^2$ deduce $\det(I_3 - AB) \det(I_3 + AB) = 1$

Finalizeaza $\det(I_3 + AB) \neq 0$

P3. XI. Se consideră șirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ și $(c_n)_{n \geq 1}$ definite prin: $a_1 > 0$, $b_1 > 0$,

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad c_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că $|c_{n+1} - \sqrt{2}| = (\sqrt{2} - 1) \left| \frac{a_n - b_n \sqrt{2}}{a_n + b_n} \right|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$

Demonstrație:

a) $|c_{n+1} - \sqrt{2}| = \left| \frac{a_n + 2b_n - a_n \sqrt{2} - b_n \sqrt{2}}{a_n + b_n} \right| = (\sqrt{2} - 1) \left| \frac{a_n - b_n \sqrt{2}}{a_n + b_n} \right|$

b) $|c_{n+1} - \sqrt{2}| = (\sqrt{2} - 1) \frac{c_n}{a_n + b_n} |c_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |c_n - \sqrt{2}|$

P4. XI. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(2x) - f(x)) = 0.$

Demonstrați că $\forall a \in (0, +\infty)$, există $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(ax) - f(x))$ și valoarea acestei limite este 0.

Demonstrație:

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(4x) - f(2x)) = 0 \quad (1p) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(4x) - f(x)) = 0$
 Prin inducție $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(2^n x) - f(x)) = 0$ pentru $x \rightarrow \frac{x}{2^n}$,
 obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(\frac{x}{2^n}) - f(x)) = 0$
 Fie $k \in \mathbb{Z}$ a. r. $2^k \leq a < 2^{k+1}$, f cresc \Rightarrow
 $f(2^k x) - f(x) \leq f(ax) - f(x) \leq f(2^{k+1} x) - f(x)$
 Finalizare, cu $x \rightarrow \infty$