Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2013. március 9.

VII. OSZTÁLY

1. feladat. Igazold, hogy az

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1006}}+\frac{1}{\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}}$$

egyenletnek 2013 darab megoldása van az egész számok halmazában!

Gazeta Matematică

2. feladat. Határozd meg azokat az (a, b) valós számokból álló számpárokat, amelyekre igaz az

$$|ax+by|+|bx+ay|=2|x|+2|y|$$

egyenlőség bármely x és y valós szám esetén!

3. feladat. Az ABC háromszög (AB) és (AC) oldalain úgy vesszük fel az M illetve N pontokat, hogy $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ANM}$. Legyen D az A pont szimmetrikusa a B pontra nézve, P és Q pedig az $[MN]$ illetve $[CD]$ szakasz felezőpontja.

Bizonyítsd be, hogy az A, P és Q pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha $AC = AB\sqrt{2}$.

4. feladat. Adott az $ABCD$ négyzet. A $\widehat{CAB}$ szög belső tartományában felvesszük az E pontot úgy, hogy a $\widehat{BAE}$ szög mértéke legyen 15°, a BE és BD egyenesek pedig merőlegesek legyenek. Bizonyítsd be, hogy $AE = BD$.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.

Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

CLASA a VII-a

Problema 1. Arătaţi că ecuaţia:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1006}}+\frac{1}{\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}}$$

are 2013 soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinaţi perechile de numere reale (a,b) pentru care egalitatea

$$|ax+by|+|bx+ay|=2|x|+2|y|$$

este adevărată pentru orice numere reale x şi y.

Problema 3. Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele M şi respectiv N astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ANM$. Punctul D este simetricul punctului A faţă de B, iar P şi Q sunt mijloacele segmentelor $[MN]$ şi respectiv $[CD]$.

Demonstraţi că punctele A, P şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă $AC = AB\sqrt{2}$.

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul E în interiorul unghiului $\sphericalangle CAB$, astfel încât măsura unghiului $\sphericalangle BAE$ este de 15°, iar dreptele BE şi BD sunt perpendiculare. Demonstraţi că $AE = BD$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.