INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA **SSMR DÂMBOVIŢA**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 28.02.2015

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Arătaţi că dacă a, b, c sunt numere naturale diferite, astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$, atunci cel puţin unul dintre ele este multiplu de 5.

G.M. 2014

SUBIECTUL 2

Se consideră numărul $N = \overline{abcdef}$. Să se demonstreze că numărul N este divizibil cu 7 dacă şi numai dacă $\overline{ef} + 2\cdot\overline{cd} + 4\cdot\overline{ab}$ este divizibil cu 7.

Folosind eventual acest rezultat să se arate că numărul $\overline{1.....12....2....9.....9}$ este divizibil cu 7, ştiind că fiecare cifră de la 1 la 9 apare de 12 ori.

G.M.2014

SUBIECTUL 3

a) Arătaţi că numărul 2^{20} are 7 cifre.
b) Arătaţi că numărul 2^{130} are 40 de cifre.

R.M.T.

SUBIECTUL 4

a) Aflaţi cel mai mare număr de cinci cifre care împărţit la 98 dă restul 97 .

b) Aflaţi $\overline{xy}$ ştiind că numărul $\overline{x00y21}$ împărţit la $\overline{xyyx}$ dă câtul $\overline{xy}$ şi restul $\overline{yy}$.

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 2 ore.

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Arătaţi că dacă a, b, c sunt numere naturale diferite, astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$, atunci cel puţin unul dintre ele este multiplu de 5.

Presupunem că nici un număr nu este multiplu de 5.	**2p**
Rezultă $u(a^2)$, $u(b^2)$ şi $u(c^2) \in \{1, 4, 6, 9\}$, $u(x)$ fiind ultima cifră a lui x.	**2p**
De aici rezultă că $u(b^2 + c^2) \in \{0, 2, 3, 5, 7, 8\}$.	**2p**
Contradicţie cu $u(a^2) \in \{1, 4, 6, 9\}$.	**1p**

SUBIECTUL 2

Se consideră numărul $N = \overline{abcdef}$. Să se demonstreze că numărul N este divizibil cu 7 dacă şi numai dacă $\overline{ef} + 2\cdot\overline{cd} + 4\cdot\overline{ab}$ este divizibil cu 7. Folosind eventual acest rezultat să se arate că numărul $\overline{1\ldots12\ldots2\ldots9\ldots9}$ este divizibil cu 7, ştiind că fiecare cifră de la 1 la 9 apare de 12 ori.

Dacă $A = \overline{ef} + 2\cdot\overline{cd} + 4\cdot\overline{ab}$, atunci $N - A = 98\cdot\overline{cd} + 9996\cdot\overline{ab} = 7(14\cdot\overline{cd} + 1428\cdot\overline{ab}) \vdots 7$.	**2p**
Egalitatea anterioară demonstrează ambele implicaţii: $N \vdots 7$ dacă şi numai dacă $A \vdots 7$.	**2p**
Numărul $N = \overline{1\ldots12\ldots2\ldots9\ldots9}$ este divizibil cu 111111 care este divizibil cu 7.	**2p**
Numărul 111111 este divizibil cu 7 se arată fie utilizând rezultatul anterior, fie $111111 \vdots 1001$ şi $1001 \vdots 7$, fie $111111=7\cdot15873$.	**1p**

SUBIECTUL 3

a) **Arătaţi că numărul 2^{20} are 7 cifre.**

b) **Arătaţi că numărul 2^{130} are 40 de cifre.**

Se arată că: $10^6 < 2^{20} < 10^7$ sau se calculează $2^{20} = 1048576$.	**3p**
Trebuie arătat că $10^{39} < 2^{130} < 10^{40}$.	**2p**
Prima parte a inegalităţii se obţine din $(10^3)^{13} < (2^{10})^{13} \Leftrightarrow 1000^{13} < 1024^{13}$ (A).	**1p**
A doua parte se obţine din $(2^{13})^{10} < (10^4)^{10} \Leftrightarrow 8192^{10} < 10000^{10}$ (A).	**1p**

SUBIECTUL 4

a) **Aflaţi cel mai mare număr de cinci cifre care împărţit la 98 dă restul 97.**

b) **Aflaţi $\overline{xy}$, ştiind că numărul $\overline{x00y21}$ împărţit la $\overline{xyyx}$ dă câtul $\overline{xy}$ şi restul $\overline{yy}$.**

a)

$100000 = 98\cdot1020 + 40$ sau $99999 = 98\cdot1020 + 39$.	**1p**
Şi atunci numărul este $98\cdot1019 + 97 = 99959$.	**2p**

b)

$\overline{x00y21} = \overline{xyyx}\cdot\overline{xy} + \overline{yy}$	**1p**
Analizând egalitatea după ultima cifră avem: $u(x\cdot y + y) = u[y(x + 1)] = 1$.	**1p**
Dacă se aplică criteriul de divizibilitate cu 11, cum membrul drept este divizibil cu 11 se obţine din membrul stâng $y = x + 1$ şi atunci $u(y^2)=1$, de unde y=9, x=8 şi numărul este 89. Dacă nu se aplică criteriul de divizibilitate cu 11, deoarece $x\neq0$, $y\neq1$, se analizează cazurile: x=2, y=7; x=6, y=3; x=8, y=9;	**2p**