OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

22 februarie 2014

CLASA a VI–a

1. Comparaţi fracţiile $f_1 = \dfrac{a+125^{725}}{a+625^{544}}$ şi $f_2 = \dfrac{b+121^{1007}}{b+343^{671}}$, unde a şi b sunt numere naturale.

2. Fie a = $\dfrac{7}{2x+3y}$, b = $\dfrac{2x+3y}{3x+1}$, c = $\dfrac{3x+1}{7}$, d = $\dfrac{25}{(x+2)^2+(2y+1)^2}$, unde x, y $\in \mathbf{N^*}$.

Să se arate că a, b, c sunt simultan naturale dacă şi numai dacă d este număr natural.

3. Pe laturile (OX şi (OY ale unghiului ascuţit $\sphericalangle XOY$ se consideră punctele B, respectiv D, astfel încât (OB) ≡ (OD). Fie A $\in$ (OB) astfel încât AB este un sfert din OB şi C $\in$ (OD) astfel încât OC reprezintă 75% din OD. Dacă BC ∩ AD = {E}, arătaţi că:

a) (3p) (BC) ≡ (AD);
b) (2p) $\Delta BCD \equiv \Delta DAB$;
c) (2p) semidreapta (OE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2 ore.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VI–a

1. Comparaţi fracţiile $f_1 = \dfrac{a+125^{725}}{a+625^{544}}$ şi $f_2 = \dfrac{b+121^{1007}}{b+343^{671}}$, unde a şi b sunt numere naturale.

Soluţie: $f_1 = \dfrac{a+125^{725}}{a+625^{544}} = \dfrac{a+\left(5^3\right)^{725}}{a+\left(5^4\right)^{544}} = \dfrac{a+5^{2175}}{a+5^{2176}}$

– deoarece $5^{2175} < 5^{2176}$, obţinem că $a + 5^{2175} < a + 5^{2176}$, deci $f_1 < 1$.

$f_2 = \dfrac{b+121^{1007}}{b+343^{671}} = \dfrac{b+\left(11^2\right)^{1007}}{b+\left(7^3\right)^{671}} = \dfrac{b+11^{2014}}{b+7^{2013}}$

– deoarece $11^{2014} > 7^{2013}$, obţinem că $b + 11^{2014} > b + 7^{2013}$, deci $f_2 > 1$.
Din $f_1 < 1$ şi deci $f_2 > 1$ deducem că $f_1 < f_2$.

Barem:

$f_1 = \dfrac{a+125^{725}}{a+625^{544}} = \dfrac{a+\left(5^3\right)^{725}}{a+\left(5^4\right)^{544}} = \dfrac{a+5^{2175}}{a+5^{2176}}$	2p
– deoarece $5^{2175} < 5^{2176}$, obţinem că $a + 5^{2175} < a + 5^{2176}$, deci $f_1 < 1$	1p
$f_2 = \dfrac{b+121^{1007}}{b+343^{671}} = \dfrac{b+\left(11^2\right)^{1007}}{b+\left(7^3\right)^{671}} = \dfrac{b+11^{2014}}{b+7^{2013}}$	2p
– deoarece $11^{2014} > 7^{2013}$, obţinem că $b + 11^{2014} > b + 7^{2013}$, deci $f_2 > 1$	1p
Finalizare: $f_1 < f_2$.	1p

2. Fie a = $\dfrac{7}{2x+3y}$, b = $\dfrac{2x+3y}{3x+1}$, c = $\dfrac{3x+1}{7}$, d = $\dfrac{25}{(x+2)^2+(2y+1)^2}$, unde x, y $\in$ **N***. Să se arate că a, b, c sunt simultan naturale dacă şi numai dacă d este număr natural.

Soluţie: „$\Rightarrow$”: a·b·c = 1, dar a, b, c $\in$ **N,** deci a = b = c = 1; c = $\dfrac{3x+1}{7} = 1 \Rightarrow$ x = 2; a = $\dfrac{7}{2x+3y} = 1 \Rightarrow$ y = 1; se obţine d = 1, deci d $\in$ **N.**

„$\Leftarrow$”: d $\in$ **N** $\Rightarrow$ $(x+2)^2 + (2y+1)^2 \in D_{25} \Rightarrow (x+2)^2 + (2y+1)^2 \in \{1, 5, 25\}$; dacă x, y $\in$ **N*,** atunci $x+2 \geq 3$ şi $2y+1 \geq 3$, adică $(x+2)^2 \geq 9$ şi $(2y+1)^2 \geq 9$; obţinem $(x+2)^2 + (2y+1)^2 \geq 18$, deci $(x+2)^2 + (2y+1)^2 = 25$; 25 = 16 + 9, de unde x = 2 şi y = 1; se obţine a = b = c = 1, deci a, b, c $\in$ **N**.

Barem:

„$\Rightarrow$”: a·b·c = 1, dar a, b, c $\in$ **N,** deci a = b = c = 1	1p
c = $\dfrac{3x+1}{7} = 1 \Rightarrow$ x = 2; a = $\dfrac{7}{2x+3y} = 1 \Rightarrow$ y = 1	1p
d = 1, deci d $\in$ **N**	1p
„$\Leftarrow$”: d $\in$ **N** $\Rightarrow$ $(x+2)^2 + (2y+1)^2 \in D_{25} \Rightarrow (x+2)^2 + (2y+1)^2 \in \{1, 5, 25\}$	1p
x, y $\in$ **N*,** deci $x+2 \geq 3$ şi $2y+1 \geq 3$, adică $(x+2)^2 \geq 9$ şi $(2y+1)^2 \geq 9$; obţinem $(x+2)^2 + (2y+1)^2 \geq 18$, deci $(x+2)^2 + (2y+1)^2 = 25$	1p

– se obţine x = 2 şi y = 1	1p
a = b = c = 1, deci a, b, c $\in \mathbf{N}$	1p

3. Pe laturile (OX şi (OY ale unghiului ascuţit $\sphericalangle XOY$ se consideră punctele B, respectiv D, astfel încât (OB) ≡ (OD). Fie $A \in (OB)$ astfel încât AB este un sfert din OB şi $C \in (OD)$ astfel încât OC reprezintă 75% din OD. Dacă $BC \cap AD = \{E\}$, arătaţi că:

a) (3p) (BC) ≡ (AD);

b) (2p) $\Delta BCD \equiv \Delta DAB$;

c) (2p) semidreapta (OE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$.

Prof. Mariana Nicuţă, Rădăuţi

Soluţie: $AB = \frac{1}{4}OB$; $OC = 75\%\ OD = \frac{3}{4}OD \Rightarrow CD = \frac{1}{4}OD$; deoarece (OB) ≡ (OD) $\Rightarrow$ (AB) ≡ (CD) şi (OA) ≡ (OC).

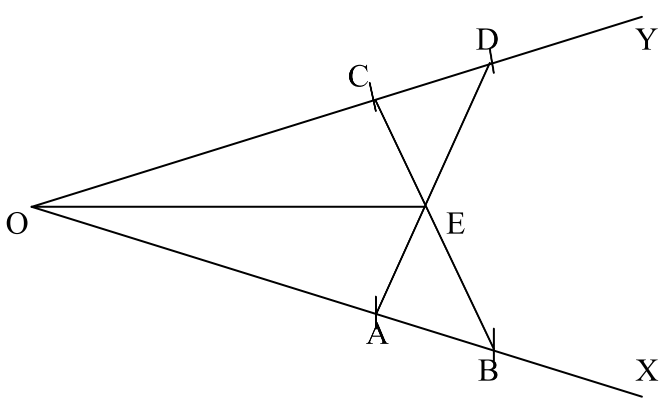
a) (OB) ≡ (OD) (din ip.), (OC) ≡ (OA) şi $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle DOA$ ($\sphericalangle$comun) $\Rightarrow$ $\Delta BCO \equiv \Delta DAO$ (*LUL*), de unde obţinem: (BC) ≡ (AD); $\sphericalangle BCO \equiv \sphericalangle DAO$; $\sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle ODA$.

b) (CD) ≡ (AB), (BC) ≡ (AD) şi (BD) ≡ (BD) $\Rightarrow$ $\Delta BCD \equiv \Delta DAB$ (*LLL*).

c) (AB) ≡ (CD), $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ECD$ şi $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle CED$ (opuse la vârf) $\Rightarrow$ $\Delta EAB \equiv \Delta ECD$ (*LUU*), de unde obţinem (EA) ≡ (EC).
(OA) ≡ (OC), (EA) ≡ (EC) şi (OE) ≡ (OE) $\Rightarrow$ $\Delta EOA \equiv \Delta EOC$ (*LLL*) $\Rightarrow$ $\sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle EOC$.

Barem:

a) Desen	1p
– dem. că (AB) ≡ (CD) şi (OA) ≡ (OC).	1p
– dem. că $\Delta BCO \equiv \Delta DAO \Rightarrow$ (BC) ≡ (AD)	1p
b) – dem. că $\Delta BCD \equiv \Delta DAB$	2p
c) – dem. că $\Delta EAB \equiv \Delta ECD \Rightarrow$ (EA) ≡ (EC)	1p
– dem. că $\Delta EOA \equiv \Delta EOC \Rightarrow \sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle EOC$	1p



Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.