OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ- Clasa a VII-a
26 februarie 2016
Subiecte

1. a) Dacă $1 < a < \sqrt{2}$, să se calculeze

E=$\sqrt{(a-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2a-\sqrt{3})^2} + |\sqrt{2}-\sqrt{3}|$.

b) Pentru $x > y$ și $n = \frac{\sqrt{xy}}{3\sqrt{2}} \in \mathbb{N}^*$, aflați valoarea lui $n^2 + n + 1$

2. Se dau numerele: $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \cdots + \sqrt{3^{2016}}$,

$b = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2016}$ și $c = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1$. Arătați că c este pătrat perfect.

S:E 15.144 Supliment G.M. nr.4/ 2015

3. În dreptunghiul $ABCD$ perpendiculara din C pe diagonala BD intersectează pe (AB) în M și pe AD în P. Să se arate că:

a) $DM \perp PB$;

b) $DB \cdot DC = DA \cdot PC$

NOTĂ:

- Timp de lucru 2 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu maxim 7 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ – 26.02.2016
Clasa a VII-a
-barem-

1. a) Dacă $1 < a < \sqrt{2}$, să se calculeze

E=$\sqrt{(a-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2a-\sqrt{3})^2} + |\sqrt{2}-\sqrt{3}|$.

b) Pentru $x > y$ și $n = \frac{\sqrt{\overline{xy}}}{3\sqrt{2}} \in \mathbb{N}^*$, aflați valoarea lui n^2+n+1

SOLUȚIE ȘI BAREM DE NOTARE:

a) $E = |a-\sqrt{2}| + |2a-\sqrt{3}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{2} - a + 2a - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = a \Rightarrow E = a$
(2p)

b) Din $n = \frac{\sqrt{10x+y}}{\sqrt{18}} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n^2 = \frac{10x+y}{18}$ (1p)

Cum în plus $10x + y < 99$ *și* $x > y$ *singura posibilitate este* $n^2 = 4$ (2p)

$10x + y = 72 \Rightarrow x = 7$ *și* $y = 2$ *deci* $n = 2$ (1p)

Așadar $n^2 + n + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$ (1p)

2. Se dau numerele: $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \cdots + \sqrt{3^{2016}}$, $b = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2016}$ și $c = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1$. Arătați că c este pătrat perfect.

S:E 15.144 Supliment G.M. nr.4/ 2015

SOLUȚIE ȘI BAREM DE NOTARE:

$\sqrt{3} \cdot a = \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3^4} + \cdots + \sqrt{3^{2016}} + \sqrt{3^{2017}}$ (1p)

$a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3^4} + \cdots + \sqrt{3^{2016}}$

Scăzând cele două relații obținem:

$a \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3^4} + \cdots + \sqrt{3^{2016}} + \sqrt{3^{2017}} - \sqrt{3} - \sqrt{3^2} - \sqrt{3^3} - \sqrt{3^4} - \cdots - \sqrt{3^{2016}}$

(1p)

$a \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3^{2017}} - \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3^{2017}} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ (0,5p)

$3 \cdot b = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016} + 3^{2017}$; $b = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016}$ (0,5p)

Scăzând cele două relații obținem: $b = \frac{3^{2017} - 3}{2}$ (0,5p)

$c = \frac{\frac{3^{2017}-3}{2}}{\frac{\sqrt{3^{2017}}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{3^{2017}-3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3^{2017}}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow c = \frac{3^{2017}-3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3^{2017}}-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow c = \frac{3 \cdot (3^{2016}-1)}{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3^{2016}}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{3^{2016}-1}{\sqrt{3^{2016}}-1} - 1$

(2p)

$c = \frac{1+3^{2016}-1-\sqrt{3^{2016}}}{\sqrt{3^{2016}}-1} = \frac{3^{2016}-3^{1008}}{3^{1008}-1} = 3^{1008} = (3^{504})^2 \Rightarrow c$ *este pătrat perfect* (1,5p)

3.În dreptunghiul $ABCD$ perpendiculara din C pe diagonala BD intersectează pe (AB) în M și pe AD în P. Să se arate că:

- **a)** $DM \perp PB$;
- **b)** $DB \cdot DC = DA \cdot PC$

În $\Delta BDP, BA \perp PD$,
$PM \perp BD$ $(2p)$ $\Rightarrow M$ *este ortocentrul triunghiului* $\Delta BDP \Rightarrow DM \perp PB$ $(1p)$

Din asemănarea triunghiurilor ΔABD *și* ΔDPC $(2p)$ $\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{PC} \Rightarrow BD \cdot DC = AD \cdot PC$ (1p)

Se acordă (1p) pe desenul corect.