Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

CLASA a VII-a

Problema 1. a) Arătaţi că numărul

$$a=\sqrt{9-\sqrt{77}}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(9+\sqrt{77}\right)$$

este natural.

b) Se consideră numerele reale x şs y astfel încât $xy=6$. Dacă $x>2$ şi $y>2$, arătaţi că $x+y<5$.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Arătaţi că dacă există două numere naturale p şi q astfel încât $\sqrt{2p-q}$ şi $\sqrt{2p+q}$ sunt numere naturale, atunci q este par.

b) Determinaţi câte numere naturale p au proprietatea că $\sqrt{2p-4030}$ şi $\sqrt{2p+4030}$ sunt simultan numere naturale.

Problema 3. În triunghiul ABC, fie M mijlocul laturii $[AC]$ şi punctul $N\in(AM)$. Paralela prin N la AB intersectează dreapta BM în P, paralela prin M la BC intersectează dreapta BN în Q, iar paralela prin N la AQ intersectează dreapta BC în S.

Demonstraţi că dreptele PS şi AC sunt paralele.

Problema 4. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construieşte triunghiul isoscel ABE, cu $m\left(\sphericalangle ABE\right)=120^\circ$. Se notează cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului EAB, cu N piciorul perpendicularei din M pe AB, iar cu P intersecţia dreptelor CN şi MB.

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABE. Demonstraţi că dreptele PG şi AE sunt paralele.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. a) Arătaţi că numărul $a = \sqrt{9-\sqrt{77}} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right) \cdot \left(9+\sqrt{77}\right)$ este natural.
b) Se consideră numerele reale x şi y astfel încât $xy = 6$. Dacă $x > 2$ şi $y > 2$, arătaţi că $x + y < 5$.

Gazeta Matematică

Soluţie

a) Numărul a se poate rescrie $\sqrt{18-2\sqrt{77}} \cdot \left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right) \cdot \left(9+\sqrt{77}\right)$ **1p**

$18-2\sqrt{77} = \left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^2$ **2p**

Ca urmare, $a = \left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^2 \cdot \left(9+\sqrt{77}\right) = \left(18-2\sqrt{77}\right)\left(9+\sqrt{77}\right) = 8 \in \mathbb{N}$ **1p**

b) Dacă $x > 2$, $y > 2$, atunci $(x-2)(y-2) > 0$ **2p**

Rezultă $xy - 2(x+y) + 4 > 0$, de unde $x + y < \frac{1}{2}(xy+4) = 5$ **1p**

Problema 2. a) Arătaţi că dacă există două numere naturale p şi q astfel încât $\sqrt{2p-q}$ şi $\sqrt{2p+q}$ sunt numere naturale, atunci q este par.
b) Determinaţi câte numere naturale p au proprietatea că $\sqrt{2p-4030}$ şi $\sqrt{2p+4030}$ sunt simultan numere naturale.

Soluţie

a) Din ipoteză, există numerele naturale k şi r astfel încât $2p-q = k^2$, $2p+q = r^2$; atunci $r^2 - k^2 = 2q$ **1p**

Atunci $(r-k)(r+k) = 2q$, iar concluzia se obţine din faptul că $r-k$ şi $r+k$ au aceeaşi paritate **2p**

b) Notând ca mai sus, avem $(r-k)(r+k) = 2 \cdot 4030 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$ **1p**

Cum $r-k$ şi $r+k$ au aceeaşi paritate, iar $r-k < r+k$, perechea $(r-k, r+k)$ poate fi $(2, 4030)$, $(10, 806)$, $(26, 310)$ sau $(62, 130)$.

Se obţine $r \in \{2016, 408, 168, 96\}$, iar $p \in \{2030113, 81217, 12097, 2593\}$, deci există 4 numere cu proprietatea din enunţ **3p**

Problema 3. În triunghiul ABC, fie M mijlocul laturii $[AC]$ şi punctul $N \in (AM)$. Paralela prin N la AB intersectează dreapta BM în P, paralela prin M la BC intersectează dreapta BN în Q, iar paralela prin N la AQ intersectează dreapta BC în S.

Demonstraţi că dreptele PS şi AC sunt paralele.

Soluţie

Notând $MQ \cap AB = \{E\}$ şi $\{D\} = NP \cap ME$, obţinem $EA = EB$ şi $ND = DP$ **2p**

Cum $ANPB$ este trapez, punctele A, Q, P sunt coliniare **2p**

$\Delta ADP \equiv \Delta SDN$ (U.L.U.) **1p**

Rezultă $[AP] \equiv [SN]$ şi, cum $AP \parallel SN$, patrulaterul $ANSP$ este paralelogram, deci $PS \parallel AC$ **2p**

Problema 4. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construieşte triunghiul isoscel ABE, cu $m(\sphericalangle ABE) = 120°$. Se notează cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului EAB, cu N piciorul perpendicularei din M pe AB, iar cu P intersecţia dreptelor CN şi MB.

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABE. Demonstraţi că dreptele PG şi AE sunt paralele.

Soluţie

$m(\sphericalangle BAM) = 15°$ implică $MN = \frac{1}{4}AB$ **2p**

Din $MN \parallel BC$ rezultă $\Delta PMN \sim \Delta PBC$, deci $\dfrac{PM}{PB} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{4}$ şi, notând $\{Q\} = BM \cap AE$, rezultă $\dfrac{PM}{BQ} = \dfrac{1}{6}$, de unde $PB = PM + \dfrac{1}{2}BQ = \dfrac{2}{3}BQ$ **3p**

Dacă F este mijlocul segmentului $[AE]$, atunci $\dfrac{BG}{BF} = \dfrac{2}{3}$ şi, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $PG \parallel AE$ **2p**