Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2013. március 9.

X. OSZTÁLY

1. feladat. Adottak az $a, b \in \mathbb{R}$ és $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ számok úgy, hogy fennálljon az $|a-b| = |a+b-2z|$ egyenlőség.

a) Igazold, hogy a $|z-a|^x + |\overline{z}-b|^x = |a-b|^x$, egyenletnek egy és csak egy $x \in \mathbb{R}$ megoldása van!

b) Határozd meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre fennáll az

$$|z-a|^x + |\overline{z}-b|^x \leq |a-b|^x$$

egyenlőtlenség!

Gazeta Matematică

2. feladat. Legyenek $a, b \in \mathbb{C}$. Igazold, hogy az $|az + b\overline{z}| \leq 1$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn bármely egységnyi moduluszú ($|z| = 1$) z komplex szám esetén, ha $|a| + |b| \leq 1$.

3. feladat. Adottak az $a, b \in \mathbb{R}^*$ számok és az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ bx, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases},$$

függvény.

Igazold, hogy f akkor és csak akkor injektív, ha f szürjektív.

4. feladat. Adott az $n \in \mathbb{N}^*$ szám. Igazold, hogy

$$2\sqrt{2^n} \cos\left(n \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

egy páratlan egész szám!

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.

Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2012

CLASA a X-a

Problema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ astfel încât $|a-b| = |a+b-2z|$.

a) Să se arate că ecuaţia $|z-a|^x + |\overline{z}-b|^x = |a-b|^x$, cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, are soluţie unică.

b) Să se rezolve inecuaţia $|z-a|^x + |\overline{z}-b|^x \leq |a-b|^x$, cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $a, b \in \mathbb{C}$. Să se arate că $|az + b\overline{z}| \leq 1$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$, dacă şi numai dacă $|a| + |b| \leq 1$.

Problema 3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ bx, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases},$$

unde a şi b sunt două numere reale nenule.

Să se arate că f este injectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că numărul

$$2\sqrt{2^n} \cos\left(n \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

este număr întreg impar.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.